

KLASSISCHE MECHANIK UND DYNAMISCHE SYSTEME

Prof. Dr. H. Römer

Sommersemester 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrangesche Mechanik	1
1.1	Funktionale und Funktionalableitungen	1
1.2	Das Hamiltonsche Prinzip	3
1.3	Invarianzen und Erhaltungssätze	6
1.4	Hamiltonscher Formalismus	9
2	Klassische Feldtheorie	11
2.1	Kanonischer Formalismus	11
2.2	Invarianzen und Erhaltungssätze	13
2.2.1	Translationsinvarianz	13
2.2.2	Globale Symmetrietransformationen	13
2.3	Kleine Störungen	13
3	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	14
3.1	Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder	14
3.1.1	Mannigfaltigkeiten	14
3.1.2	Tangentenvektoren und Tangentenvektorfelder	15
3.1.3	Tensorfelder	16
3.2	Wirkung von Abbildungen auf Tensorfelder	18
3.3	Flüsse und Lieableitung	19
4	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen auf symplektischen Mannigfaltigkeiten	20
4.1	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen in symplektischer Formulierung	20
4.2	Symplektische Mannigfaltigkeiten und kanonische Transformationen	21
4.3	Symplektische Vektorräume	23
4.4	Lineare kanonische Transformationen und Gaußsche Optik	24
5	Exakt symplektische Phasenräume	27
5.1	Exakt symplektische Mannigfaltigkeiten	27
5.2	Kotangentenbündel	28
5.3	Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik	29
5.4	Symmetrien und Erhaltungssätze	29
5.5	Kanonische Transformationen in Darbouxschen Koordinaten	30
6	Die Methode von Hamilton und Jacobi	31
7	Integrable Systeme	33
7.1	Vollständig integrable Systeme	33
7.2	Störungen von integrablen Systemen: Das KAM-Theorem	35
8	Kontaktmannigfaltigkeiten und zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Theorie	37
9	Qualitative Mechanik	40
9.1	Problemstellung und grundlegende Definitionen	40
9.1.1	Welche Punkte in M werden von der Bahn durch m besucht oder angenähert?	40
9.1.2	Welche Fixpunkte und geschlossenen Bahnen hat der Fluss ϕ_t^X ?	41
9.1.3	Wie verhält sich ϕ_t^X für sehr große Zeiten t ?	41
9.1.4	Ist der Fluss geordnet oder ‘chaotisch’?	42
9.1.5	Wie hängt ϕ_t^X von dem Vektorfeld X ab?	42
9.2	Vektorfelder auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten	43
9.3	Lokale Stabilität	44
9.4	Poincaré-Abbildung und hyperbolische Zyklen	45
9.5	Generische Eigenschaften	46
9.6	Bifurkationen, generische Kurven in $D^1(M)$, ‘Katastrophen’	48
9.6.1	Katastrophen an kritischen Punkten	49
9.6.2	Katastrophen an Zyklen	50
9.7	Attraktoren und Chaos	50

9.7.1	Liapunov-Exponenten	53
9.7.2	Hausdorff-Dimension und Verallgemeinerungen	55
9.7.3	Kolmogorov-Entropie	56

1 Lagrangesche Mechanik

1.1 Funktionale und Funktionalableitungen

Funktionale sind Abbildungen, deren Definitionsbereich Mengen von Funktionen sind. Für unsere Betrachtungen sind besonders Mengen von Bahnkurven auf einem Intervall $[t_1, t_2]$ wichtig. Jede derartige Bahnkurve ordnet den Zeiten t mit $t_1 \leq t \leq t_2$ Punkte $x(t) \in \mathbb{R}^n$ in einem n -dimensionalen Vektorraum zu. Insbesondere betrachten wir folgende Mengen von Bahnkurven:

- \mathcal{B} : Menge aller glatten Bahnkurven $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$
- \mathcal{B}_{x_1, x_2} : Menge aller Bahnkurven aus \mathcal{B} mit festem Anfangs- und Endpunkt $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$

Wir betrachten nun Funktionale

$$F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{B}_{x_1, x_2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto F[\gamma].$$

Beispiele:

i.) $F[\gamma] = a \cdot x(t_0)$

ii.) $F[\gamma] = \dot{x}^2(t_0)$

iii.) $F[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt f(t) \cdot x(t)$

iv.) $L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2(t)}$ (Bogenlängenfunktional)

v.) $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2(t) - V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)) \right)$ (Wirkungsfunktional)

vi.) $A[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$ (Verallgemeinerung von (iii) - (v))

Die stetig differenzierbare Funktion

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \dot{x}, t) \mapsto L(x, \dot{x}, t)$$

heißt *Lagrangefunktion*.

Die Funktionale (i) und (ii) sind lokal, d.h. $F[\gamma]$ hängt nur vom Verhalten von γ in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes t_0 ab. Die übrigen Funktionale sind nichtlokal, d.h. $F[\gamma]$ kann vom gesamten Verlauf von γ abhängen. Die Funktionale (i) und (iii) sind linear, d.h.

$$F[c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2] = c_1 F[\gamma_1] + c_2 F[\gamma_2], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ganz analog wie für gewöhnliche Funktionen definiert man Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionalen: F heißt stetig im Punkte γ_0 , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0]| < \epsilon \quad \text{für} \quad \|h\| < \delta.$$

Ein stetiges Funktional F heißt differenzierbar im Punkte γ_0 , wenn es ein stetiges lineares Funktional $F'[\gamma_0]$, so dass

$$F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0] = F'[\gamma_0]h + o(\|h\|).$$

Linearität von $F'[\gamma_0]$ bedeutet natürlich

$$F'[\gamma_0](c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 F'[\gamma_0]h_1 + c_2 F'[\gamma_0]h_2,$$

man schreibt auch oft

$$\delta F[\gamma_0] = F'[\gamma_0]\delta h + o(\|\delta h\|)$$

und nennt δh eine *virtuelle Verrückung*.

Festzulegen ist noch die Definition der Norm $\|h\|$. Es kommen viele Möglichkeiten in Betracht:

- $\|h\|_1 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |h(t)|$
- $\|h\|_2 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |h(t)| + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\dot{h}(t)|$

- $\|h\|_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt |h(t)|$

Wir werden i.a. die Norm $\|h\|_2$ benutzen. Es gilt nun der wichtige

Satz 1.1 *Das Funktional $A[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t)$ ist stetig und differenzierbar für alle $\gamma \in \mathcal{B}$. Die Ableitung im Punkte γ ist durch das lineare Funktional*

$$A'[\gamma]h = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) h(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right) h(t)$$

gegeben.

BEWEIS:

$$\begin{aligned} A[\gamma + h] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t) + h(t), \dot{x}(t) + \dot{h}(t), t) \\ &= A[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) + o(\|h\|) \\ &= A[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} h - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \right) + o(\|h\|) \\ &= A[\gamma] + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

□

Diese Schreibweise ist abkürzend: Für Kurven in \mathbb{R}^n bedeutet

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i.$$

Sofern man das Funktional A auf Kurven $\gamma \in \mathcal{B}_{x_1, x_2}$ mit festem Anfangs- und Endpunkt einschränkt, ist

$$h(t_1) = h(t_2) = 0,$$

und die Ableitung ist einfach gegeben durch

$$A'[\gamma]h = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h.$$

Wie in der gewöhnlichen Analysis gilt der

Satz 1.2 *Besitzt das Funktional F im Punkte γ_0 ein lokales Minimum (Maximum), so ist*

$$F'[\gamma_0] = 0.$$

Das heißt also, dass $F'[\gamma_0]h = 0$ für alle h oder für alle h mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$, falls F auf \mathcal{B}_{x_1, x_2} eingeschränkt ist. γ_0 heißt stationärer Punkt von F , wenn $F'[\gamma_0] = 0$. $F'[\gamma_0] = 0$ bedeutet, dass

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) = 0$$

und dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_0(t_1), \dot{x}_0(t_1), t_1) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_0(t_2), \dot{x}_0(t_2), t_2) = 0.$$

BEWEIS: Sei in irgendeinem Punkte $t_0 \neq t_1, t_2$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t_0) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_0) \neq 0,$$

so gibt es ein Intervall um t_0 , in welchem diese Größe nicht verschwindet. Dann lässt sich eine Funktion h mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$ finden, so dass gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h(t) \neq 0,$$

also

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

und damit weiter

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t_2} = 0 \quad .$$

□

Schränken wir A wieder auf \mathcal{B}_{x_1, x_2} ein, so reduziert sich die Stationaritätsbedingung $A'[\gamma_0] = 0$ auf die *Euler-Lagrangesche Gleichung*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Bahnkurve $\gamma_0 : t \mapsto x_0(t)$, für welche A stationär ist. γ_0 muss zusätzlich die Randbedingungen $x_0(t_1) = x_1$, $x_0(t_2) = x_2$ erfüllen.

Beispiel: Stationäre Punkte des Bogenlängenfunktional

$$\mathcal{L} : \mathcal{B}_{x_1, x_2} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{L}[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2(t)}$$

Dies ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wir erhalten die Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{\dot{x}^2}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = 0.$$

$\dot{x}/|\dot{x}|$ ist der Tangenteneinheitsvektor, der also längs der Kurve für die kürzeste Verbindung von x_1 und x_2 konstant sein muss. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist also eine Gerade.

1.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Satz 1.3 *Eine Bahnkurve $\gamma \in \mathcal{B}_{x_1, x_2}$ ist genau dann Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen*

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) + \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), t) = 0,$$

wenn sie stationärer Punkt des Wirkungsfunktional

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) - V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), t) \right)$$

ist.

BEWEIS: Man hat lediglich nachzuprüfen, dass die Euler-Lagrangesche Gleichung für das Funktional S mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen übereinstimmt. In der Tat ist

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) - V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), t),$$

also haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = \vec{\nabla}_{\vec{x}_i} L = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_i} V,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_i} L = m_i \dot{\vec{x}}_i.$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \iff \quad m_i \ddot{\vec{x}}_i + \vec{\nabla}_i V = 0.$$

□

Das Hamiltonsche Prinzip ist einer der Grundpfeiler der theoretischen Mechanik. Einige wichtige Bemerkungen:

i.) Die Lagrangefunktion L ist nicht eindeutig bestimmt. Ersetzt man $L(x, \dot{x}, t)$ durch

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt}f(x, t) = L(x, \dot{x}, t) + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \quad ,$$

so findet man für die Wirkungsfunktionale

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(x, \dot{x}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt}f(x, t) \right) \\ &= S[\gamma] + f(x(t_2), t_2) - f(x(t_1), t_1) \end{aligned}$$

Auf \mathcal{B}_{x_1, x_2} unterscheiden sich \tilde{S} und S also nur um eine Konstante und haben die selben stationären Punkte.

ii.) Über die Natur eines stationären Punktes γ_0 von S gibt die zweite Ableitung von S Auskunft. Es ist (in vereinfachter Schreibweise)

$$S[\gamma_0 + h] = S[\gamma_0] + S'[\gamma_0]h + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}m\dot{h}^2(t) - \frac{1}{2}V''(x_0(t))h^2(t) \right) + o(\|h\|^2)$$

Wenn γ_0 stationärer Punkt ist, gilt somit

$$S[\gamma_0 + h] = S[\gamma_0] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}m\dot{h}^2(t) - \frac{1}{2}V''(x_0(t))h^2(t) \right) + o(\|h\|^2)$$

Wenn $t_2 - t_1$ klein genug ist, so ist wegen $h(t_1) = 0$ der zweite Term positiv. Für nicht zu große Zeitintervalle $[t_1, t_2]$ sind also die stationären Punkte von S *Minima* (Prinzip von der minimalen Wirkung).

iii.) Das Hamiltonsche Prinzip ist koordinatenunabhängig im folgenden Sinne: Geht man durch eine (eventuell sogar zeitabhängige) Transformation von den kartesischen Koordinaten x zu anderen Koordinaten q über,

$$x = x(q, t), \quad q = q(x, t) \quad ,$$

so schreibt sich eine Bahnkurve $\gamma : t \mapsto x(t)$ als Abbildung

$$t \mapsto q(t) = q(x(t), t) \quad .$$

Die Geschwindigkeitskurve rechnet sich folgendermaßen um:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(q(t), t) = \frac{\partial x}{\partial q}(q(t), t)\dot{q}(t) + \frac{\partial x}{\partial t}(q(t), t)$$

Für das Wirkungsfunktional finden wir dann:

$$\begin{aligned} S[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L \left(x(q(t), t), \frac{\partial x}{\partial q}(q(t), t)\dot{q}(t) + \frac{\partial x}{\partial t}(q(t), t), t \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{L}(q(t), \dot{q}(t), t), \quad \text{wobei} \\ \hat{L}(q, \dot{q}, t) &= L \left(x(q, t), \frac{\partial x}{\partial q}(q, t)\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t), t \right) \end{aligned}$$

Der Wert von $S[\gamma]$ hängt, ebenso wie die Tatsache, dass γ_0 ein stationärer Punkt von S ist, nicht davon ab, ob die Bahnkurven mit Hilfe der Koordinaten q oder x geschrieben werden. Somit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q} = 0$$

äquivalent: $q(t)$ löst die zweite Gleichung genau dann, wenn $x(q(t), t)$ die erste Gleichung löst.

Hiermit ist zugleich ein sehr bequemes Verfahren gefunden, Bewegungsgleichungen auf andere Koordinaten umzuschreiben.

iv.) Wenn man die Beliebigkeit der Koordinaten zum Ausdruck bringen will, so nennt man die Koordinaten oft q und schreibt $\hat{L}(q, \dot{q}, t)$ und für die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q} = 0$$

$p_{q_i} = \partial \hat{L} / \partial \dot{q}_i$ heißt der zu der Koordinate q_i gehörige *verallgemeinerte Impuls* und $K_{q_i} = \partial \hat{L} / \partial q_i$ die zur Koordinate q_i gehörige *verallgemeinerte Kraft*. Also gilt $\dot{p}_{q_i} = K_{q_i}$.
In kartesischen Koordinaten ist

$$p_{\vec{x}_i} = m \dot{\vec{x}}_i \quad \text{und} \quad K_{\vec{x}_i} = -\vec{\nabla}_i V,$$

in Polarkoordinaten im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned} p_r &= m \dot{r} \quad , \\ K_r &= m r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - V'(r) \quad (\text{radiale äußere Kraft} + \text{Zentrifugalkraft}) \\ p_\varphi &= m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ K_\varphi &= 0 \quad (\text{3-Komponente von Drehimpuls und Drehmoment}). \end{aligned}$$

Eine Koordinate q_i heißt *zyklisch*, wenn $\partial \hat{L} / \partial q_i = 0$. In diesem Falle ist für Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}_{q_i} = 0.$$

Der zu einer zyklischen Koordinate gehörige verallgemeinerte Impuls ist eine Erhaltungsgröße.

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art lassen sich aus einem Variationsprinzip ableiten: Wir wollen mit \mathcal{B}_{x_1, x_2}^M die Menge der Bahnkurven $\gamma : t \mapsto x(t)$ mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2 bezeichnen, welche zusätzlich den Nebenbedingungen genügen, für welche also $x(t) \in M_t \forall t \in [t_1, t_2]$ gilt. Dann gilt der

Satz 1.4 Eine Bahnkurve $\gamma_0 \in \mathcal{B}_{x_1, x_2}^M$ ist genau dann Lösung der Lagrangeschen Gleichungen erster Art, wenn sie stationärer Punkt des Wirkungsfunktional $S : \mathcal{B}_{x_1, x_2}^M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\gamma \mapsto S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2(t) - V(x(t), t) \right)$$

ist. In anderen Worten: γ_0 muss stationärer Punkt des Wirkungsfunktional unter der Nebenbedingung $x(t) \in M_t \forall t \in [t_1, t_2]$ sein.

BEWEIS: Verläuft ganz analog wie oben, mit der einzigen Änderung, dass bei der Variation diesmal nur virtuelle Verrückungen $h_M(t) = \delta_M x(t)$ tangential zu M_t zugelassen sind:

$$\begin{aligned} S[\gamma + h_M] &= S[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) + \vec{\nabla}_i V(x(t), t) \right) \cdot \delta_M \vec{x}_i(t) + o(\|h_M\|) \\ &= S[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{p}(t) + \nabla V(x(t), t)) \cdot \delta_M x(t) + o(\|h_M\|) \end{aligned}$$

□

Stationarität von S im Punkte γ_0 bedeutet dann, da ja $\delta_M x(t)$ stets tangential zu M_t ist, nicht einfach $\dot{p}(t) + \nabla V(x(t), t) = 0$, sondern $\dot{p} + \nabla V(x(t), t)$ senkrecht zu M_t . Also:

$$\dot{p}(t) + \nabla V(x(t), t) = - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(t) \nabla F_{\alpha}(x(t), t).$$

Die stationären Punkte von S unter der Nebenbedingung $x(t) \in M_t$ lassen sich nun auch auf andere Weise berechnen: Man parametrisiert M_t durch Einführung von Parametern $q = (q_1, \dots, q_f)$, deren Anzahl $f = \dim M_t$ der der Freiheitsgrade entspricht. Die zulässigen Lagen des Systems sind dann Funktionen $x(q, t)$ der Parameter, es gilt für alle q, t : $F_{\alpha}(x(q, t), t) = 0$, $\alpha = 1, \dots, s$, und wenn q alle Werte durchläuft, so

durchläuft $x(q, t)$ - wenigstens lokal - alle zulässigen Lagen. Die zulässigen Bahnkurven sind dann durch Funktionen $q(t)$ gegeben, und die Wirkung berechnet sich in diesen Koordinaten wie folgt:

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$$

mit

$$\hat{L}(q, \dot{q}, t) = L\left(x, \frac{\partial x}{\partial q}(q, t) \cdot \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t), t\right).$$

Die Nebenbedingungen sind nun durch die Wahl der Koordinaten q bereits berücksichtigt, und die Variation erfolgt ohne Nebenbedingungen an q . Somit ist die Bahnkurve $t \mapsto x(q(t), t)$ genau dann Lösung der Lagrangeschen Gleichungen erster Art, wenn gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0.$$

1.3 Invarianzen und Erhaltungssätze

Wir denken uns an einem mechanischen System gewisse kontinuierliche Transformationen ausgeführt, die wir durch eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ parametrisieren.

Beispiel: Translationen eines N -Teilchensystems in Richtung eines Vektors \vec{a}

$$\vec{x}_i(t) \mapsto \vec{x}_i(t) + \alpha \vec{a} \stackrel{Def.}{=} \vec{x}_i(t, \alpha),$$

oder in kompakter Schreibweise

$$x(t) \mapsto x(t, \alpha), \quad x(t, 0) = x(t).$$

Eine Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \dots, t),$$

bei der das Potential V nur von der Differenz zweier Ortsvektoren $\vec{x}_i - \vec{x}_j$ abhängt, ist offenbar translationsinvariant unter Translation in beliebiger Richtung \vec{a} . Also ist dann $L(x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha), t) = L(x(t), \dot{x}(t), t)$ unabhängig von α , insbesondere ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Wir wollen die Konsequenzen derartiger Invarianzeigenschaften der Lagrangefunktion untersuchen. Es sei allgemein in Koordinaten q durch $q(t, \alpha)$, $q(t, 0) = q(t)$, eine Schar von Bahnkurven gegeben, die durch kontinuierliche Transformationen auseinander hervorgehen. Ferner sei $L(q, \dot{q}, t)$ invariant unter diesen Transformationen:

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Dann ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = 0,$$

also

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) \cdot \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \cdot \dot{\eta}(t) = 0,$$

mit

$$\eta(t) \stackrel{Def.}{=} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} q(t, \alpha) \right|_{\alpha=0}.$$

Dann folgt weiter, dass

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \cdot \eta(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \cdot \eta(t) \right) = 0.$$

Wenn $q(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, so verschwindet der erste Term. Es gilt also der folgende

Satz 1.5 Noethersches Theorem. Wenn die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ invariant unter Transformationen $q(t) \mapsto q(t, \alpha)$ ist, so ist die Größe

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \eta \quad \text{mit} \quad \eta(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} q(t, \alpha) \right|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße. Wir sehen also, dass es einen Zusammenhang zwischen Invarianzeigenschaften der Dynamik und der Existenz von Erhaltungsgrößen gibt.

Beispiele:

i.) Translationsinvarianz.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \dots, t) \\ x(t, \alpha) &= (\vec{x}_1(t) + \alpha \vec{a}, \dots, \vec{x}_N(t) + \alpha \vec{a}) \\ \eta(t) &= (\vec{a}, \dots, \vec{a}) \end{aligned}$$

Die zugehörige Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \eta = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{a} = \vec{P} \cdot \vec{a}$$

Also: Wenn die Lagrangefunktion invariant unter Translationen in \vec{a} -Richtung ist, so ist die \vec{a} -Komponente des Gesamtimpulses eine Erhaltungsgröße. Wenn die Lagrangefunktion unter Translationen in alle Richtungen invariant ist (das ist für abgeschlossene Systeme der Fall), so ist der Gesamtimpuls \vec{P} eine Erhaltungsgröße. Die Impulserhaltung ist eine Folge der Translationsinvarianz.

ii.) Rotationsinvarianz.

Für Rotationen um die \vec{n} -Achse um den Winkel α um den Ursprung \vec{o} ist für ein Partikelchen

$$\vec{\eta}(t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{x}(t, 0) = \vec{n} \times \vec{x}(t),$$

für N Partikelchen ist

$$\vec{\eta}_i(t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{x}_i(t, 0) = \vec{n} \times \vec{x}_i(t), \quad \text{d.h.} \quad \eta = (\vec{n} \times \vec{x}_1, \dots, \vec{n} \times \vec{x}_N).$$

Die zugehörige Erhaltungsgröße ist dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \eta = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{x}_i) = \vec{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \times \vec{x}_i = \vec{n} \cdot \vec{L}.$$

Also: Wenn die Lagrangefunktion invariant unter Drehungen um die \vec{n} -Achse ist, so ist die \vec{n} -Komponente $\vec{n} \cdot \vec{L}$ des Gesamtdrehimpulses eine Erhaltungsgröße. Invarianz unter beliebigen Drehungen führt also zur Erhaltung des Gesamtdrehimpulses \vec{L} .

In einigen Fällen gilt nicht

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = 0,$$

sondern die nur etwas schwächere Bedingung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t), t)$$

mit einer gewissen von der Art der Transformation abhängigen Funktion f . In diesem Falle ist zwar nicht die Lagrangefunktion, wohl aber die Wirkung (bis auf eine Konstante) invariant. Eine Invarianz dieser Art führt offenbar zu einem Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - f(q(t), \dot{q}(t), t) \right) = 0.$$

iii.) Translationen der Zeit.

$$\begin{aligned} q(t, \alpha) &= q(t + \alpha), \\ \eta(t) &= \dot{q}(t), \\ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} &= \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial}{\partial t} L(q, \dot{q}, t). \end{aligned}$$

Wenn also L nicht explizit von der Zeit abhängt, so ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t).$$

Es liegt dann also gerade eine Invarianz der oben beschriebenen Art vor mit $f = L$. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta - f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L.$$

Die Bedeutung dieser Erhaltungsgröße erweist sich in kartesischen Koordinaten: Für

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

ist die Erhaltungsgröße

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \dot{\vec{x}}_i - L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N),$$

also die Energie. Die Erhaltung der Gesamtenergie erweist sich als Folge der zeitlichen Translationsinvarianz. Allgemein: Wenn $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ und $T(q, \dot{q})$ homogen vom Grade 2 in \dot{q} , so ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = T(q, \dot{q}) + V(q).$$

Diese Bedingung ist für alle Systeme erfüllt, die durch zeitunabhängige Parametrisierung aus Lagrange'schen Systemen in kartesischen Koordinaten hervorgehen, insbesondere also für Systeme mit holonom-skleronomen Nebenbedingungen. Die Erhaltungsgröße ist dann einfach die Energie, ausgedrückt durch die Koordinaten q .

iv.) Galilei-Transformationen.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 - V(x), \\ \vec{x}_i(t, \alpha) &= \vec{x}_i(t) + \alpha \vec{v}_0 t, \\ \vec{\eta}_i(t) &= \vec{v}_0 t. \end{aligned}$$

Wenn L translationsinvariant ist, so gilt für die Galileitransformationen

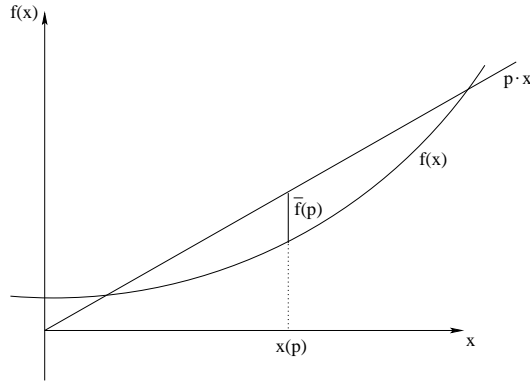
$$\left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} (x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i(t) \cdot \vec{v}_0 = \frac{d}{dt} \vec{v}_0 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i(t).$$

Der zugehörige Erhaltungssatz bei Invarianz mit beliebigem \vec{v}_0 ist der *Schwerpunktsatz*

$$\frac{d}{dt} \left(t \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \right) = 0.$$

1.4 Hamiltonscher Formalismus

Die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ eines mechanischen Systems entsteht aus der Lagrangefunktion durch *Legendretransformation* bezüglich der Variable \dot{q} . Wir wollen zunächst die Legendretransformierte einer Funktion $f(x)$, die auch in anderen Zweigen der Physik, beispielsweise in der Thermodynamik, von Bedeutung ist, allgemein definieren. Wir beginnen mit Funktionen einer reellen Variablen. Im folgenden nehmen wir an, dass $f(x)$ streng konvex und zweimal stetig differenzierbar sei, d.h. $f'(x)$ streng monoton steigend (also umkehrbar) oder, äquivalent, $f''(x) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur in isolierten Punkten gelten darf. Die Legendretransformierte $\bar{f}(p)$ der Funktion $f(x)$ ist dann definiert durch



$\bar{f}(p)$ ist also der maximale Ordinatenunterschied zwischen der Funktion $f(x)$ und px in Abhängigkeit von p .

Man findet, indem man das Maximum aufsucht,

$$\bar{f}(p) = x(p)p - f(x(p)),$$

wobei $x(p)$ eindeutig bestimmt ist durch $f'(x(p)) = p$, d.h. $x(p)$ ist der Punkt, in dem f' den Wert p hat. In der Legendretransformation wird also die unabhängige Variable x durch $p = f'(x)$ ersetzt. Wegen der Monotonie von f' ist dies eindeutig. Wir geben einige Eigenschaften der Legendretransformation.

- i.) Ist $\bar{f}(p)$ Legendretransformierte von $f(x)$, so ist $\bar{\bar{f}}(x)$ Legendretransformierte von $f(x)$.
- ii.) Es gilt die *Youngsche Ungleichung*: $f(x) + \bar{f}(p) \geq px$. Das Gleichheitszeichen gilt für $x = x(p)$.
- iii.) $\bar{f}(p)$ ist konvex.
- iv.) $\bar{\bar{f}}(x) = f(x)$: Die Legendretransformation ist involutorisch.

BEWEIS: (i) und (ii) folgen sofort aus der Definition der Legendretransformation. Zu (iii): Wir berechnen

$$\bar{\bar{f}}(p) = x(p) + p \frac{dx(p)}{dp} - f'(x(p)) \frac{dx(p)}{dp} = x(p),$$

da $p = f'(x(p))$. Mit $f'(x) = p$ ist auch $x(p)$ streng monoton. Zu (iv): $\bar{\bar{f}}(x) = xp(x) - \bar{f}(p(x))$, wobei $p(x)$ definiert ist durch $\bar{f}'(p(x)) = x$. Andererseits ist nach (iii) $\bar{f}'(p(x)) = x(p(x)) = x$. Hiermit, und aus der Definition von \bar{f} , folgt

$$\bar{\bar{f}}(x) = xp(x) - x(p(x))p(x) - f(x(p(x))) = f(x).$$

□

Für Funktionen von n Variablen lautet die Konvexitätsforderung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ ist positiv definit fast überall.}$$

Die Legendretransformierte ist dann definiert durch

$$\bar{f}(p) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i - f(x) \right) = \sum_{i=1}^n p_i x_i(p) - f(x(p))$$

mit $p_i = \nabla_i f(x(p))$. (i) - (iv) gelten auch in diesem Falle noch.

Wir führen nun eine Legendretransformation von $L(q, \dot{q}, t)$ bezüglich des Arguments \dot{q} durch, q und t sind hierbei einfach als Parameter zu behandeln. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t)$ ist nichts anderes als der kanonisch konjugierte Impuls von q . Wir nehmen nun an, dass diese Funktion für beliebige feste Werte von q und t nach \dot{q} umkehrbar sei: $\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)$. Für kartesische Koordinaten ist dies sicher der Fall, und ganz allgemein, wenn L als Funktion von \dot{q} streng konvex ist.

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - V(x), \quad \text{also} \quad \vec{p}_i = m_i \dot{x}_i, \quad \text{und} \quad \dot{x}_i = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i.$$

Wir definieren die *Hamiltonfunktion* $H(p, q)$, indem wie in der Energiefunktion die Größe \dot{q} durch p ersetzen:

$$\begin{aligned} H(p, q, t) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}(p, q, t), t) \cdot \dot{q}(p, q, t) - L(q, \dot{q}(p, q, t), t) \\ &= p \cdot \dot{q}(p, q, t) - L(q, \dot{q}(p, q, t), t) \end{aligned}$$

Es gilt der

Satz 1.6 Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p}(p(t), q(t), t) = \dot{q}(t), \quad \frac{\partial H}{\partial q}(p(t), q(t), t) = -\dot{p}(t).$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}, \quad \text{da} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \text{da} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{und} \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}. \end{aligned}$$

Umgekehrt sieht man leicht, dass aus den Hamiltonschen Gleichungen die Lagrangeschen Gleichungen folgen. \square

Beispiel: Kartesische Koordinaten.

$$H(p, x) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(x)$$

Hamiltonsche Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} &\iff \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} = \dot{x}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} &\iff \vec{\nabla}_i V = -\dot{\vec{p}}_i \end{aligned} \right\} \implies m \ddot{x}_i + \vec{\nabla}_i V(x) = 0.$$

Die Hamiltonschen Gleichungen sind Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen $q(t)$ und $p(t)$ als unabhängige Funktionen behandelt werden. Lösungen werden durch Vorgabe von Anfangsbedingungen $p(t_0) = p_0$, $q(t_0) = q_0$ eindeutig festgelegt. Dies ist gerade dieselbe Anzahl von Anfangsbedingungen wie bei der Newtonschen Bewegungsgleichung. Ein Hauptvorteil der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ist die Tatsache, dass p und q in symmetrischer Weise auftreten, anders als q und \dot{q} in den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. q und p zusammen sind Koordinaten des sogenannten *Phasenraums*, dessen Punkte also durch $x = (q, p)$ bezeichnet werden können. *Phasenraumtrajektorien* sind Kurven $x(t) = (q(t), p(t))$ im Phasenraum. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems geht durch jeden Punkt des Phasenraums genau eine Phasenraumtrajektorie, die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung ist. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lassen sich als dynamisches System in der Form

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

schreiben mit

$$\dot{x}(t) = (\dot{q}(t), \dot{p}(t))$$

und dem Geschwindigkeitsfeld

$$X(x) = \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \right).$$

Das Geschwindigkeitsfeld $X(x)$ auf dem Phasenraum ist divergenzfrei:

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(x) = \sum_{i=1}^{2f} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

Hieraus folgt das *Theorem von Liouville*:

Satz 1.7 *Ein Gebiet W des Phasenraums gehe durch die Zeitentwicklung, die durch die Hamiltonsche Bewegungsgleichung gegeben ist, in ein Gebiet W_t zur Zeit t über. Dann haben W und W_t dasselbe Volumen.*

Für die Zeitabhängigkeit einer Größe $A(p, q)$, also einer reellwertigen Funktion auf dem Phasenraum, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(p(t), q(t)) &= \frac{\partial A}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial A}{\partial q} \cdot \dot{q} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial A}{\partial p}, \quad \text{wegen } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{und} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \{A, H\} \end{aligned}$$

Die durch

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \cdot \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \cdot \frac{\partial B}{\partial q}$$

definierte Funktion heißt *Poissonklammer* der Funktionen A und B . A ist eine Erhaltungsgröße, wenn $\{A, H\} = 0$, wenn also die Poissonklammer von A mit der Hamiltonfunktion verschwindet. Man kann die folgenden Eigenschaften der Poissonklammer beweisen:

- i.) Antisymmetrie: $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- ii.) Linearität: $\{A, c_1 B_1 + c_2 B_2\} = c_1 \{A, B_1\} + c_2 \{A, B_2\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- iii.) Jacobi-Identität: $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$
- iv.) $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$

Die Funktionen auf dem Phasenraum bilden offenbar einen (unendlich-dimensionalen) Vektorraum. Ein Vektorraum heißt *Lie-Algebra*, wenn auf ihm ein Produkt $(A, B) \mapsto \{A, B\}$ definiert ist, für welches (i)-(iii) gelten. Er heißt *Poissonalgebra*, wenn ein zweites Produkt $(A, B) \mapsto AB$ definiert ist mit der Eigenschaft (iv). Die Phasenraumfunktionen bilden also eine Poissonalgebra. Wenn A und B Erhaltungsgrößen sind, so ist $\{H, A\} = \{H, B\} = 0$, und dann sind wegen (iii) und (iv) auch $\{A, B\}$ und AB Erhaltungsgrößen. Somit bilden die Erhaltungsgrößen eine Poisson-Unteralgebra aller Phasenraumfunktionen.

2 Klassische Feldtheorie

2.1 Kanonischer Formalismus

Es sei W ein (normierter) Vektorraum von Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $A : W \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung (Funktional).

Definition 2.1 *Die Funktionalableitung $\frac{\delta A}{\delta \varphi}[\varphi_0]$ an der Stelle $\varphi_0 \in W$ ist das lineare Funktional $W \rightarrow \mathbb{R}$, für welches gilt:*

$$A[\varphi_0 + \delta\varphi] - A[\varphi_0] = \frac{\delta A}{\delta \varphi}[\varphi_0] \cdot \delta\varphi + o(\delta\varphi) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int d^d x \frac{\delta A}{\delta \varphi(x)}[\varphi_0] \cdot \delta\varphi(x) + o(\delta\varphi).$$

Für Funktionale der Form

$$A[\varphi] = \int_M d^d x A(\varphi, \nabla\varphi) \quad \text{und} \quad \delta\varphi|_{\partial M} = 0$$

ist

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial A}{\partial \varphi(x)} - \nabla \cdot \frac{\partial A}{\partial \nabla \varphi(x)}.$$

Wirkungsfunktional:

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \stackrel{Def.}{=} \int dt L[\varphi, \dot{\varphi}]$$

Euler-Lagrangesche Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi} = 0 \iff \frac{\delta L}{\delta \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = 0$$

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$\pi(\vec{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\vec{x})}$$

Hamiltonfunktional:

$$H[\pi, \varphi] = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \varphi) = \int d^3x \left(\pi \dot{\varphi}(\pi, \varphi) - \mathcal{L}(\varphi, \vec{\nabla} \varphi, \dot{\varphi}(\pi, \varphi)) \right)$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi} = \dot{\varphi} &\iff \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \dot{\varphi}, \\ \frac{\delta H}{\delta \varphi} = -\dot{\pi} &\iff \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} = -\dot{\pi} \end{aligned}$$

Poissonklammern:

$$\{A[\pi, \varphi], B[\pi, \varphi]\}_p = - \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \pi(\vec{x})} \cdot \frac{\delta B}{\delta \varphi(\vec{x})} - \frac{\delta A}{\delta \varphi(\vec{x})} \cdot \frac{\delta B}{\delta \pi(\vec{x})} \right)$$

Anwendung auf

$$A = \int d^3x f(\vec{x}) \pi(\vec{x}), \quad B = \int d^3x g(\vec{x}) \varphi(\vec{x})$$

liefert

$$\begin{aligned} -\{\pi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}')\}_p &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')\}_p &= \{\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}')\}_p = 0. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{dA}{dt} = -\{H, A\}_p, \quad -\{\pi(\vec{x}), A\}_p = \frac{\delta A}{\delta \varphi(\vec{x})}, \quad -\{\varphi(\vec{x}), A\}_p = \frac{\delta A}{\delta \pi(\vec{x})}.$$

Beispiel: Komplexes skalares Feld

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2 \\ \mathcal{H} &= \pi^* \pi + \vec{\nabla} \varphi^* \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2 \end{aligned}$$

Mit $\pi = \dot{\varphi}^*$ und $\pi^* = \dot{\varphi}$ erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi(\varphi^*\varphi) = 0.$$

2.2 Invarianzen und Erhaltungssätze

2.2.1 Translationsinvarianz

\mathcal{L} (oder \mathcal{H}) hänge nicht explizit von x ab. Dann ist

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial_\mu \partial_\nu \varphi = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \right) \partial_\mu \varphi + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \partial_\mu \varphi \right)$$

Also erhalten wir für die Lösungen der Bewegungsgleichung

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0 \quad \text{mit} \quad T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \partial_\mu \varphi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}.$$

Somit sind die Größen

$$P_\mu = \int d^3 x T_\mu^\nu = \int d^3 x (\pi \partial_\mu \varphi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L})$$

erhalten. Man rechnet nach, dass

$$- \{P_\mu, \varphi\}_p = \partial_\mu \varphi \quad \text{und} \quad - \{P_\mu, \pi\}_p = \partial_\mu \pi.$$

2.2.2 Globale Symmetrietransformationen

φ sei ein mehrkomponentiges Feld mit Werten in \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n). D sei eine lineare Darstellung einer kontinuierlichen Gruppe G , und \mathcal{L} sei unter den Transformationen $\varphi(x) \mapsto D(g)\varphi(x)$ invariant, wobei $D(g)$ unabhängig von x sei. Wir betrachten eine infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\mapsto \varphi(x) + \delta\varphi(x) = \varphi(x) + \epsilon_A T_A \varphi(x) \\ \delta\mathcal{L} = 0 &\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} T_A \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial_\mu T_A \varphi = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \right) T_A \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} T_A \varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

Also ergibt sich für die Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu J_A^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad J_A^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} T_A \varphi$$

und die Größen

$$Q_A = \int d^3 x J_A^0 = \int d^3 x \pi T_A \varphi$$

sind erhalten. Es gilt dann

$$\{Q_A, \varphi\}_p = T_A \varphi.$$

2.3 Kleine Störungen

Es sei φ ein n -komponentiges reelles Feld und

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi), \quad \text{also} \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi).$$

Veranschaulichen wir uns dies anhand eines elastischen Mediums, so ist $\frac{1}{2} \pi^2$ die kinetische Energiedichte, $\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$ die Verzerrungsenergiedichte und $V(\varphi)$ die Dichte der potentiellen Energie in einem äußeren Feld. $V(\varphi)$ habe nun ein Minimum bei $\varphi = \varphi_0$. Die Bewegungsgleichung $\square \varphi = -V'(\varphi)$ hat dann die Lösung

$$\varphi(x) = \varphi_0 = \text{const.}$$

Wir betrachten nun eine kleine Störung der Form

$$\varphi = \varphi_0 + \eta : \quad \square \eta + V''(\varphi_0) \eta = 0.$$

hierbei ist $V''(\varphi_0) \stackrel{Def.}{=} M^2(\varphi_0)$ ein symmetrischer, nicht-negativer, linearer Operator $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diagonalisierung von M^2 führt dann auf die Gleichungen

$$\square \eta_i + m_i^2 \eta_i = 0 \quad \text{mit} \quad m_i^2 \geq 0.$$

Wir deuten die Ergebnisse:

$m_i^2 \neq 0$: Dispersionsgesetz für ebene Wellen: $\omega = \sqrt{m_i^2 + \vec{k}^2}$
 Greensche Funktion von $\Delta - m_i^2$: $G(\vec{x}) \propto e^{-m_i|\vec{x}|}/|\vec{x}|$
 Die Störung ist *kurzreichweitig*.

$m_i^2 = 0$: Dispersionsgesetz: $\omega = |\vec{k}|$
 Greensche Funktion: $G(\vec{x}) \propto \frac{1}{|\vec{x}|}$
 Die Störung ist *langreichweitig*, wie bei einer elastischen Welle ohne äußerem Potential, bei der die Frequenz für lange Wellenlängen gegen Null strebt, da globale Transformationen ohne Energieaufwand möglich sind.

Es gibt also genau dann langreichweitige Störungen, wenn $V''(\varphi_0)$ Nulleigenvektoren hat. Eine hinreichende Bedingung hierfür liefert das *klassische Goldstone-Theorem*.

Satz 2.2 *Es sei $V(\varphi)$ invariant unter Transformationen $\delta\varphi = T_A\varphi$. Ferner habe $V(\varphi)$ bei $\varphi = \varphi_0$ ein Minimum mit $T_A\varphi_0 \neq 0$. Dann gibt es eine langreichweitige Störung $T_A\varphi_0$.*

BEWEIS:

$$0 = \delta V = V'(\varphi)T_A\varphi.$$

Differenziation nach φ liefert

$$V''(\varphi)T_A\varphi + V'(\varphi)T_A = 0 \implies V''(\varphi_0)T_A\varphi_0 = 0,$$

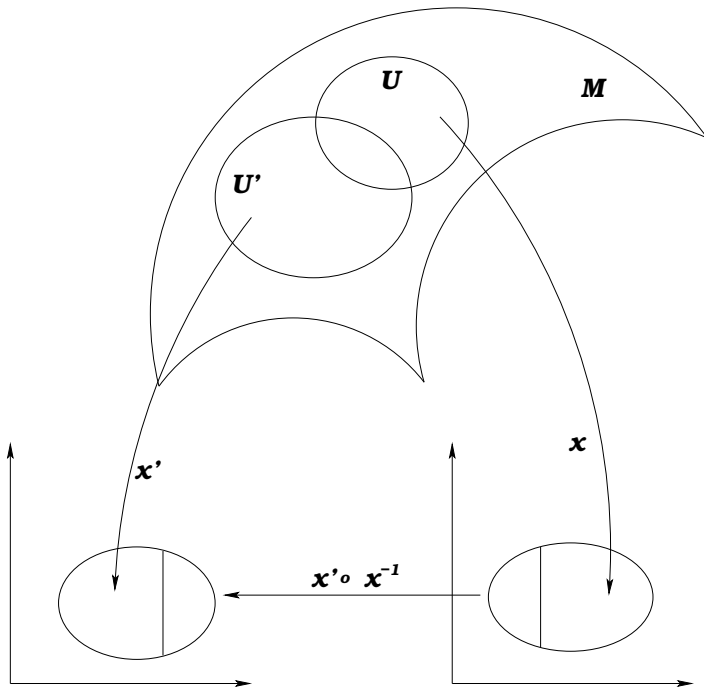
was bedeutet, dass $T_A\varphi_0$ Nulleigenvektor von $V''(\varphi_0)$ ist. □

3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

3.1 Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder

3.1.1 Mannigfaltigkeiten

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Raum M , der sich stückweise umkehrbar auf offene Teilmengen des \mathbb{R}^n abbilden lässt. Jedem Punkt in M werden also *Koordinaten* (x^i) in \mathbb{R}^n zugeordnet. Es ist i.A. nicht möglich, Koordinaten für alle Punkte von M zugleich anzugeben, vielmehr sind die Koordinatenabbildungen gewöhnlich nur für Teilmengen von M gültig. Wenn dieselben Punkte durch verschiedene Koordinaten (x^i) und (x'^i) beschreiben werden, dann rechnen sich (x^i) und (x'^i) durch glatte (beliebig oft differenzierbare) Funktionen $x^i(x')$ und $x'^i(x)$ ineinander um.



Definition 3.1 Eine Karte von M ist ein Tripel (U, x, W) , wobei U eine offene Teilmenge von M , W eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $x : U \rightarrow W$ eine bijektive Abbildung - die Koordinatenabbildung - ist.

Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_{(i)}, x_{(i)}, W_{(i)})\}$ ist eine Familie von Karten mit den Eigenschaften

i.) $\bigcup U_{(i)} = M$, d.h. jeder Punkt von M liegt im Geltungsbereich wenigstens einer Karte.

ii.) Verträglichkeitsbedingung: Wenn $U_{(i)} \cap U_{(j)} \neq \emptyset$, dann ist die Abbildung

$$x_{(j)} \circ x_{(i)}^{-1} : x_{(i)}(U_{(i)} \cap U_{(j)}) \rightarrow x_{(j)}(U_{(i)} \cap U_{(j)}),$$

durch welche die Koordinaten eines Punktes in verschiedenen Karten ineinander umgerechnet werden, bijektiv und unendlich oft differenzierbar.

Eine Mannigfaltigkeit ist also zu definieren als eine Menge M zusammen mit einem Atlas \mathcal{A} von M .

Die Menge der glatten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ wollen wir $C^\infty(M)$ nennen. In Koordinaten (x^i) ist jedes $f \in C^\infty(M)$ einfach eine glatte Funktion $f_x(x^i)$. Glatte Abbildungen $\phi : M \rightarrow N$ von einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannigfaltigkeit N sind dadurch definiert, dass sie, in Koordinaten ausgedrückt, glatt sind. Glatte, bijektive Abbildungen heißen *Diffeomorphismen*.

3.1.2 Tangentenvektoren und Tangentenvektorfelder

Sei p ein Punkt in M mit Koordinaten x_0^i . Eine Kurve $\gamma(t)$ in M mit p als Anfangspunkt wird durch eine Funktion $x_\gamma^i(t)$ beschrieben mit $x_\gamma^i(t) = x(\gamma(t))^i$. $\gamma(t)$ bestimmt eine *Richtungsableitung* $\dot{\gamma}_0$ im Punkte p . Jeder Funktion $f \in C^\infty(M)$ wird eine Zahl

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f_x(x_\gamma(t)) \right|_{t=0} = \sum_i \frac{dx_\gamma^i}{dt} \partial_i f_x(x_\gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

zugeordnet, die Richtungsableitung von f in Richtung des Tangentenvektors der Kurve $x^i(t)$ im Punkte p . Hierbei ist $f_x = f \circ x^{-1}$. Abstrakt definieren wir einen Tangentialvektor an M im Punkte p als eine Richtungsableitung im Punkte p , und eine Richtungsableitung in p ist eine Abbildung

$$v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch die folgenden charakteristischen Eigenschaften definiert ist:

i.) $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$.

$$ii.) v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

In anderen Worten: v ist eine *Derivation*, $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge aller Richtungsableitungen im Punkte $p \in M$ heißt *Tangententialraum* von M in p , geschrieben $T_p M$. Jede Richtungsableitung $v \in T_p M$ ist eindeutig in der Form $v = \sum v^i \partial_i|_p$ darstellbar mit $v^i \in \mathbb{R}$. Das heißt also, $T_p M$ ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Eine Basis bilden die speziellen Richtungsableitungen $\partial_i|_p$, die Richtungsableitungen in Richtung der Koordinatenkurven durch p . Ein (*Tangenten-*)*Vektorfeld* auf M ist nun eine glatte Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit einen Tangentenvektor $X(p) \in T_p M$ im Punkte p zuordnet. Im Gültigkeitsbereich der Koordinaten (x^i) schreibt sich jedes Vektorfeld eindeutig in der Form

$$X(p) = \sum X^i(p) \partial_i$$

als Kombination der Basisvektorfelder ∂_i mit glatten Funktionen $X^i(p)$. Die Menge der Vektorfelder auf M heiße $D^1(M)$. Jedes Vektorfeld X ordnet einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ eine andere Funktion

$$Xf = \sum X^i \partial_i f$$

zu. Hierbei ist

$$i.) (h_1 X_1 + h_2 X_2)f = h_1 X_1 f + h_2 X_2 f, \quad h_1, h_2, f \in C^\infty(M), X_1, X_2 \in D^1(M)$$

$$ii.) X(f + g) = Xf + Xg$$

$$iii.) X(fg) = fXg + gXf.$$

Man kann Vektorfelder geradezu als Derivations-Abbildungen $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit (i)-(iii) definieren. Wenn X und Y Vektorfelder sind, dann ist die Abbildung $XY : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, die durch $XYf = X(Yf)$ definiert ist, kein Vektorfeld, da (iii) nicht gilt. Wohl aber ist $[X, Y] = XY - YX$ ein Vektorfeld. $[X, Y]$ heißt *Lieprodukt* von X und Y . Es gilt:

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y.$

3.1.3 Tensorfelder

Eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ definiert eine Abbildung $df : D^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ wie folgt:

$$df(x) = Xf.$$

df ordnet also jedem Vektorfeld eine Funktion zu, so dass

$$df(h_1 x_1 + h_2 x_2) = h_1 df(x_1) + h_2 df(x_2).$$

Lineare Abbildungen $D^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ heißen *Kovektorfelder*. $D_1^0(M)$ sei die Bezeichnung für die Menge der Kovektorfelder. Für die Koordinatenfunktionen x^i gilt $dx^i(\partial_k) = \delta_k^i$. Die Kovektorfelder dx^i sind dual zu den Vektorfeldern ∂_k . Es ist

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

und jedes Kovektorfeld α lässt sich im Gültigkeitsbereich der Koordinaten (x^i) eindeutig in der Form $\alpha = \sum \alpha_i dx^i$ darstellen. Ein r -fach kontravariantes und s -fach kovariantes Tensorfeld definieren wir als eine $r + s$ -fach multilineare Abbildung

$$A : \underbrace{D_1 M \times \dots \times D_1 M}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{D^1 M \times \dots \times D^1 M}_{s\text{-mal}} \longrightarrow C^\infty(M).$$

Die Menge der Tensorfelder vom Typ (r, s) bezeichnen wir mit $D_s^r(M)$. Es ist

$$D_0^1(M) = D^1(M) \quad \text{und} \quad D_1^0(M) = D_1(M),$$

und wir verabreden

$$D_0^0(M) = C^\infty(M) \quad \text{und} \quad f \otimes A = A \otimes f = fA.$$

$D_s^r(M)$ ist ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $A \in D_s^r(M)$ und $B \in D_{s'}^{r'}(M)$. Das Tensorprodukt $A \otimes B \in D_{s+s'}^{r+r'}(M)$ ist einfach definiert durch

$$(A \otimes B)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) = A(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)B(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}).$$

Das Tensorprodukt ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Im Gültigkeitsbereich einer Karte sind Tensorfelder aus $D_s^r(M)$ von der Form

$$A = A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Wir werden von nun an die Summenkonvention benutzen. Beim Übergang zu neuen Koordinaten (x'^i) transformieren sich die Basisfelder wie folgt:

$$\partial_i' = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_j, \quad dx'^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Das entsprechende Transformationsgesetz der Tensorkomponenten ist also

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}' = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{m_1}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{m_r}} \cdot \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{n_s}}{\partial x^{j_s}} A_{n_1, \dots, n_s}^{m_1, \dots, m_r}.$$

Im Indexkalkül repräsentiert man ein Tensorfeld durch seine Komponenten. Oft ist es zweckmäßig, andere Basisfelder zu wählen, die nicht von der Form ∂_i bzw. dx^i sind:

$$e_a = e_a^i \partial_i \quad \text{bzw.} \quad e^a = e_i^a dx^i, \quad a = 1, \dots, n$$

mit

$$e_i^a e_b^i = \delta_b^a \quad \text{und} \quad e_i^a e_b^j = \delta_i^j.$$

Dann sind die (e^a) dual zu den (e_a) : $e^a(e_b) = \delta_b^a$ und i.A. $[e_a, e_b] \neq 0$, während für die Koordinatenfelder ∂_i gilt, dass $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Differentialformen r -ter Stufe sind spezielle Tensorfelder, nämlich antisymmetrische Tensorfelder von Typ $(0, r)$. Ihre Menge bezeichnen wir mit $\Omega_r(M)$. Sei $\alpha \in \Omega_r(M)$ und $\beta \in \Omega_{r'}(M)$. Das *äußere Produkt* $\alpha \wedge \beta \in \Omega_{r+r'}(M)$ ist das antisymmetrische Tensorprodukt von α und β :

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{r+r'}) = \frac{1}{r!r'!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{r+r'}} \text{sign}(\pi) \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(r)}) \beta(X_{\pi(r+1)}, \dots, X_{\pi(r+r')}).$$

Summiert wird hierbei über alle Permutationen von $r+r'$ Elementen, $\text{sign}(\pi)$ ist ± 1 , je nachdem, ob π gerade oder ungerade ist. Also z.B. für $\alpha, \beta \in \Omega_1(M)$:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2) = \alpha(X_1)\beta(X_2) - \alpha(X_2)\beta(X_1).$$

Das äußere Produkt ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Vielmehr gilt

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rr'} \beta \wedge \alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in \Omega_r(M), \beta \in \Omega_{r'}(M).$$

Sei $X \in D^1(M)$. Wir definieren die *Einsetzungsabbildung* $i_X : \Omega_r(M) \rightarrow \Omega_{r-1}(M)$ durch

$$(i_X \alpha)(Y_1, \dots, Y_{r-1}) = \alpha(X, Y_1, \dots, Y_{r-1}), \quad i_X f = 0 \quad \text{für} \quad f \in C^\infty(M) = \Omega_0(M).$$

Man nennt dies auch das Besetzen des ersten Arguments mit X . i_X ließe sich auch auf $D_s^r(M)$ definieren. Es ist

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (i_X \beta).$$

Schließlich ist die *äußere Ableitung*

$$\bar{d} = \Omega_r(M) \rightarrow \Omega_{r+1}(M)$$

eindeutig durch folgende Eigenschaften definiert:

i.) \bar{d} ist linear.

ii.) Auf $\Omega_0(M) = C^\infty(M)$ ist $\bar{d}f = df$, wobei $df(X) = Xf$ oben eingeführt wurde. Statt \bar{d} schreiben wir später d .

iii.) $\bar{d}(\alpha \wedge \beta) = (\bar{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (\bar{d}\beta)$, $\alpha \in \Omega_r M$.

iv.) $\bar{d}^2 \alpha = \bar{d}\bar{d}\alpha = 0$.

Im Gültigkeitsbereich einer Karte ist nämlich $\omega \in \Omega_r(M)$ eindeutig von der Form

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Wegen (i)-(iv) muss dann gelten, dass

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Eine wichtige Formel lautet:

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]), \quad \omega \in \Omega_1 M.$$

r -Formen auf M können wir über r -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten $S \subset M$ mit Rand ∂S integriert werden. Wir geben die zugehörigen, ziemlich offensichtlichen Definitionen nicht an. Es gilt dann der *allgemeine Stokessche Satz*:

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Der elementare Stokessche Satz und der Gaußsche Satz sind Spezialfälle hiervon.

3.2 Wirkung von Abbildungen auf Tensorfelder

Sei $\phi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Durch Komposition mit ϕ wird dann offenbar jeder Funktion $f \in C^\infty(N)$ eine Funktion $f \circ \phi \in C^\infty(M)$ zugeordnet:

$$\underbrace{M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f \circ \phi}.$$

Statt $f \circ \phi$ schreiben wir auch $\phi^* f$ und fassen ϕ^* als Abbildung

$$\phi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty M$$

auf. Man beachte die Richtung der Pfeile:

$$\phi : M \longrightarrow N \quad \text{aber} \quad \phi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M).$$

Tangentenvektoren v im Punkte $p \in M$ werden durch ϕ Tangentenvektoren $\phi_* v$ im Punkte $\phi(p) \in N$ wie folgt zugeordnet:

$$(\phi_* v)(f) \stackrel{Def.}{=} v(\phi^* f) = v(f \circ \phi).$$

ϕ_* ist linear. Oft schreibt man auch $(T\phi)v$ anstatt $\phi_* v$. Weiter gehört zu ϕ auch eine lineare Abbildung $\Omega_r(N) \rightarrow \Omega_r(M)$, die wir wieder ϕ^* nennen wollen. Für $\omega \in \Omega_r(N)$ definieren wir nämlich

$$(\phi^* \omega)(m)(X_1(m), \dots, X_r(m)) = \omega(\phi(m))(\phi_* X_1(m), \dots, \phi_* X_r(m)).$$

Wir können ϕ^* ebensogut auf $D_r(M)$ definieren. Auf $\Omega_r(M)$ gilt zusätzlich:

$$d\phi^* \omega = \phi^* d\omega.$$

Für Vektorfelder gelingt die Konstruktion einer linearen Abbildung $\phi^* : D^1(N) \rightarrow D^1(M)$ nur, wenn ϕ ein Diffeomorphismus ist. Man definiert

$$(\phi^* X)(p) = \phi_*^{-1} X(\phi(p)).$$

Das heißt für $f \in C^\infty(M)$, wenn wir die obigen Definitionen zusammetragen, dass

$$(\phi^* X)(f) = (X(f \circ \phi^{-1})) \circ \phi = \phi^*(X(\phi_*^{-1} f)), \quad \text{d.h.}$$

$$\phi^* X = \phi^* \circ X \circ \phi_*^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(N) & \xrightarrow{\phi^*} & C^\infty(M) \\ \downarrow X & & \downarrow \phi^* X \\ C^\infty(N) & \xrightarrow{\phi^*} & C^\infty(M) \end{array}$$

Allgemein lässt sich offenbar für Diffeomorphismen $\phi : M \rightarrow N$ die lineare Abbildung

$$\phi^* : D_s^r(N) \longrightarrow D_s^r(M)$$

definieren. Klar ist ferner, dass

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*A \otimes \phi^*B.$$

Außerdem gilt

$$(\phi^*\omega)(\phi^*X_1, \dots, \phi^*X_r) = \phi^*(\omega(X_1, \dots, X_r)) = \omega(X_1, \dots, X_r) \circ \phi.$$

3.3 Flüsse und Lieableitung

Sei $X \in D^1(M)$ ein Vektorfeld. Eine *Integralkurve* γ von X ist eine Kurve $I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$, für welche $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ gilt. Das heißt also, dass in jedem Punkt $\gamma(t)$ auf der Kurve die durch γ gegebene Richtungsableitung mit dem Wert des Feldes im Punkte $\gamma(t)$ übereinstimmt. In anderen Worten:

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = (Xf)(\gamma(t)) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M).$$

In Koordinaten wird $\gamma(t)$ durch die Funktionen $x^i(t)$ beschrieben, und mit

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

finden wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x(t)).$$

Wir haben jetzt also den Begriff eines Dynamischen Systems auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Jedes Vektorfeld definiert ein Dynamisches System. Durch jeden Punkt $p \in M$ geht genau eine Integralkurve von X , die p als Anfangspunkt hat, und die wir mit γ_p bezeichnen: $\gamma_p(0) = p$. Zu X gehört dann eine Zeitentwicklungstransformation $\phi_t^X : M \rightarrow M$, die wir durch

$$\phi_t^X(p) = \gamma_p(t)$$

definieren. $\phi_t^X(p)$ gibt an, was aus jedem Punkt p nach Ablauf der Zeit t geworden ist, wenn die Entwicklung durch Integralkurven von X gegeben ist. Zu $p \in M$ gibt es immer eine Umgebung U , so dass für alle t aus einem genügend kleinen Zeitintervall I , das den Nullpunkt einschließt, ϕ_t definiert ist und ein Diffeomorphismus $\phi_t : U \mapsto \phi_t(U)$ ist. Wenn M kompakt ist, dann ist ϕ_t sogar global und für alle t definiert. Offenbar ist

$$\phi_t^X \circ \phi_{t'}^X = \phi_{t+t'}^X.$$

Man spricht auch vom (lokalen) Fluss oder der (lokalen) Diffeomorphismengruppe von X . Wir benutzen nun die zu ϕ_t^X gehörige lineare Abbildung

$$\phi_t^{X*} : D_s^r(M) \longrightarrow D_s^r(M),$$

um die sogenannte Lie-Ableitung

$$L_X : D_s^r(M) \longrightarrow D_s^r(M)$$

von Tensorfeldern zu definieren:

$$L_X A \stackrel{\text{Def.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \phi_t^{X*} A \right|_{t=0} \quad \text{für } A \in D_s^r(M).$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$i.) \quad L_X f = Xf \quad \text{für } f \in D_0^0(M) = C^\infty(M), \text{ das folgt sofort aus der Definition von } \phi_t^X.$$

ii.) $L_X Y = [X, Y]$, für $Y \in D^1(M)$.

iii.) $(L_X \alpha)(Y) = X\alpha(Y) - \alpha([X, Y])$ für $\alpha \in \Omega^1(M) = D_1(M)$.

Die Lie-Ableitung für Tensorfelder höherer Stufe berechnet man analog. Man kann aber dazu auch

iv.) $L_X(A \otimes B) = (L_X A) \otimes B + A \otimes L_X B$

benutzen. So ergibt sich zum Beispiel

v.) $(L_X \omega)(Y_1, \dots, Y_r) = X\omega(Y_1, \dots, Y_r) - \omega([X, Y_1], Y_2, \dots, Y_r) - \dots - \omega(Y_1, \dots, Y_{r-1}, [X, Y_r])$.

Der Zusammenhang zwischen äußerer Ableitung und Lie-Ableitung von r -Formen ist durch die wichtige Formel

$$L_X \omega = (i_X d + di_X) \omega$$

gegeben, aus der u.a. auch $L_X d\omega = dL_X \omega$ folgt.

4 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen auf symplektischen Mannigfaltigkeiten

4.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen in symplektischer Formulierung

Wir sind nun in der Lage, Hamiltonsche Bewegungsgleichungen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren. Zur Orientierung betrachten wir zunächst den einfachen Fall $P = \mathbb{R}^{2n}$, bei dem der Phasenraum P ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum mit Koordinaten $q^i, p_i (i = 1, \dots, n)$ ist. Die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichung

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

sind gerade die Integralkurven des Vektorfeldes

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

auf \mathbb{R}^{2n} . Der Zusammenhang mit der Hamiltonfunktion ist der folgende: Auf \mathbb{R}^{2n} definieren wir die 2-Form

$$\omega_0 = \sum dq^i \wedge dp_i.$$

Dann ist

$$i_{X_H} \omega = dH, \quad \text{d.h. } \omega(X_H, Y) = dH(Y) = YH.$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} i_{X_H} \sum dq^i \wedge dp_i &= \sum_i \left\{ dq^i(X_H) dp_i - dq^i dp_i(X_H) \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right\} = dH \end{aligned}$$

□

Offenbar ist $d\omega_0 = 0$, und ω_0 ist in jedem Punkt nicht-ausgeartet, nämlich auf jedem Tangentialraum bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}$ durch die umkehrbare Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zu jeder Funktion $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich ein Vektorfeld X_f angeben mit

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p},$$

also

$$i_{X_f} \omega_0 = df.$$

Die Poissonklammer schreibt sich dann

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} = X_g f = df(X_g) = (i_{X_f} \omega_0)(X_g) = \omega_0(X_f, X_g).$$

Diese Zusammenhänge motivieren einige allgemeine Definitionen.

4.2 Symplektische Mannigfaltigkeiten und kanonische Transformationen

Definition 4.1 Eine symplektische Mannigfaltigkeit (P, ω) ist eine Mannigfaltigkeit P , auf der eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(P)$ definiert ist, so dass

- i.) ω in jedem Punkt von P nicht ausgeartet und
- ii.) $d\omega = 0$

ist.

Allgemeine Phasenräume werden immer symplektische Mannigfaltigkeiten sein.

Symplektische Mannigfaltigkeiten haben stets gerade Dimension, da wegen $\det J = \det J^t = \det(-J) = (-1)^N \det J$ auf Vektorräumen ungerader Dimension jede antisymmetrische Bilinearform ausgeartet ist. Es gibt jedoch Mannigfaltigkeiten gerader Dimension, auf denen (i) und (ii) nicht erfüllbar sind.

Definition 4.2 Ein Diffeomorphismus $\phi : P \rightarrow P$ einer symplektischen Mannigfaltigkeit in sich heißt Symplektomorphismus oder kanonische Transformation, wenn $\phi^*\omega = \omega$.

Definition 4.3 Das Hamiltonsche Vektorfeld X_f zu einer Funktion $f \in C^\infty(P)$ ist definiert durch

$$i_{X_f}\omega = df.$$

X_f ist durch f eindeutig und f durch X_f bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Definition 4.4 Ein Vektorfeld X heißt hamiltonisch, wenn es ein $f \in C^\infty P$ gibt, mit $X = X_f$.

Definition 4.5 Ein Vektorfeld X heißt symplektisch, wenn sein Fluss ϕ_t^X eine (lokale) Gruppe von kanonischen Transformationen ist.

Symplektische Vektorfelder sind also Erzeugende kanonischer Transformationsgruppen. Ein Vektorfeld X ist offenbar genau dann symplektisch, wenn $L_X\omega = 0$.

Definition 4.6 Ein Hamiltonsches System (P, ω, H) ist eine symplektische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Hamiltonfunktion H .

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind dann einfach die Gleichungen für den Fluss von X_H :

$$\dot{\phi}(x) = X_H(\phi_t(x)).$$

Nun gilt der fundamentale

Satz 4.7 Jedes Hamiltonsche Vektorfeld X ist symplektisch.

BEWEIS:

$$L_{X_f}\omega = i_{X_f}d\omega + di_{X_f}\omega = ddf = 0.$$

□

Umgekehrt gilt auch der

Satz 4.8 Jedes symplektische Vektorfeld ist lokal hamiltonisch.

BEWEIS:

$$L_X\omega = 0 \implies di_X\omega + i_X\omega = di_X\omega = 0.$$

Daher gibt es lokal eine Funktion f , so dass $i_X\omega = df$. □

Lokal sind also Hamiltonsche und symplektische Vektorfelder dasselbe, und es wird lokal jede einparametrische Gruppe ϕ_t von kanonischen Transformationen durch eine Funktion f als Fluss von X_t erzeugt. Ein Corollar ist das Liouvillsche Theorem:

Satz 4.9 Für die Volumenform

$$\Omega = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n\text{-mal}}$$

gilt $L_{X_H}\Omega = 0$.

Definition 4.10 Die Poissonklammer $\{f, g\}$ zweier Funktionen aus $C^\infty P$ ist $\{f, g\} = X_g f$.

Damit ist

$$\{f, g\} = df(X_g) = (i_{X_f} \omega)(X_g) = \omega(X_f, X_g).$$

Bilinearität und Antisymmetrie der Poissonklammer sind sofort klar, ebenso

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$$

Zum Beweis der Jacobi-Identität beweisen wir zunächst den auch für sich interessanten

Satz 4.11 Wenn ϕ eine kanonische Transformation ist, so gilt

$$X_{\phi^* f} = \phi^* X_f.$$

(Natürlichkeit der Bildung Hamiltonscher Vektorfelder unter kanonischen Transformationen)

Hieraus folgt z.B., dass mit X auch $\phi^* X$ hamiltonisch ist, und dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen ihre Form behalten.

BEWEIS: Wir zeigen $i_{X_{\phi^* f}} \omega = i_{\phi^* X_f} \omega$:

$$i_{X_{\phi^* f}} \omega = d\phi^* f = \phi^* df = \phi^* i_{X_f} \omega = i_{\phi^* X_f} \omega,$$

wobei die letzte Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned} (i_{\phi^* X_f} \omega)(\phi^* Y) &= \omega(\phi^* X_f, \phi^* Y) = (\phi^* \omega)(\phi^* X_f, \phi^* Y) = \phi^*(\omega(X_f, Y)) \\ &= \phi^*(i_{X_f} \omega(Y)) = (\phi^* i_{X_f} \omega)(\phi^* Y). \end{aligned}$$

□

Indem wir in $X_{\phi^* f} = \phi^* X_f$ für ϕ den Fluss $\phi_t^{X_g}$ von X_g nehmen und nach t differenzieren, erhalten wir den

Satz 4.12

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$$

Wenn $\{f, g\} = 0$, dann kommutieren also die Flüsse von X_f und X_g . Schließlich folgt hieraus die Jacobi-Identität so:

$$\{f, \{g, h\}\} = X_{\{g, h\}} f = -X_g X_h f + X_h X_g f = -X_g \{f, h\} + X_h \{f, g\} = -\{\{f, h\}, g\} + \{\{f, g\}, h\}.$$

Eine *Erhaltungsgröße* $f \in C^\infty(P)$ eines Hamiltonschen Systems ist definitionsgemäß längs des Flusses von X_H konstant, erfüllt also $X_H f = 0$, d.h. $\{f, H\} = 0$. Die Beziehung zwischen allgemeinen symplektischen Mannigfaltigkeiten und dem elementaren Spezialfall $P = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum dq^i \wedge dp_i$ ist gegeben durch den folgenden

Satz 4.13 (Satz von Darbou). Für jede symplektische Mannigfaltigkeit (P, ω) gibt es einen Atlas, so dass im Geltungsbereich jeder Karte Koordinaten (q^i, p_i) existieren, für welche ω die Gestalt

$$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$$

hat. Wir nennen solche Koordinaten symplektische Koordinaten oder Darboux-Koordinaten.

In Darboux-Koordinaten haben also Hamiltonsche Vektorfelder, die Hamiltonsche Bewegungsgleichung und Poissonklammern die elementare bekannte Form.

Wir geben einige unmittelbare Folgerungen. Sei ϕ eine kanonische Transformation, und lokal $\omega = \sum_i dQ^i \wedge dP_i$. Sei weiterhin $\phi(q, p) = (Q, P)$, dann ist lokal

$$\omega = \phi^* \omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i = \sum_i dQ^i \wedge dP_i.$$

Also gilt:

- Eine Transformation ϕ ist genau dann kanonisch, wenn sie Darboux-Koordinaten in Darboux-Koordinaten überführt.
- Eine Transformation ϕ ist genau dann kanonisch, wenn sie die kanonischen Vertauschungsregeln

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i$$

erhält, also wenn

$$\{Q^i, Q^j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q^i, P_j\} = \delta_j^i.$$

- Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in Darboux-Koordinaten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

behalten unter kanonischen Transformationen ihre Form.

Bisher hatten wir stillschweigend angenommen, dass H und damit X_H zeitunabhängig sei. Wenn wir die Zeitanhängigkeit von H und X_H zulassen, nicht aber von ω , dann ändert sich wenig: Der Fluss ϕ_{t,t_0} , der die Zeitentwicklung von t_0 nach t beschreibt, besteht nach wie vor aus kanonischen Transformationen. Es gilt:

$$\phi_{t,t_0} = \phi_{t,t_1} \circ \phi_{t_1,t_0}.$$

Die Form der Hamiltonschen Gleichung in Darboux-Koordinaten ändert sich nicht. Für eine Funktion f mit expliziter Zeitabhängigkeit ist aber

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

insbesondere gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

Übrigens lässt sich der zeitabhängige Fall durch Einführung zweier zusätzlicher Koordinaten auf den zeitunabhängigen Fall zurückführen. Wir definieren dazu $q^0 = t$, $p_0 = E$ und q^i, p_i ($i = 1, \dots, n$) wie bisher. Ferner setzen wir

$$\tilde{\omega} = -dt \wedge dE + \sum dq^i \wedge dp_i,$$

$$\tilde{H}(q, p, t, E) = H(q, p, t) - E.$$

Durch die symplektische Form ω ist auf jedem Tangentialraum $T_m P$ eine nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearform definiert. Dadurch wird $T_m P$ zu einem symplektischen Vektorraum. Es lohnt sich, solche Vektorräume zunächst allgemein zu studieren.

4.3 Symplektische Vektorräume

Definition 4.14 Ein symplektischer Vektorraum (V, J) ist ein Vektorraum V , auf dem eine nicht-ausgeartete, antisymmetrische Bilinearform J definiert ist.

Wir nehmen V im folgenden als Vektorraum über \mathbb{R} an. Man beachte hier und des weiteren die enge Analogie zu Euklidischen Vektorräumen, auf denen eine symmetrische positiv definite (und damit nicht-ausgeartete) Bilinearform definiert ist.

Definition 4.15 Sei $W \subset V$ ein Teilraum. W^\perp ist definiert durch

$$W^\perp = \{x \mid J(x, w) = 0 \forall w \in W\}.$$

Es ist $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, aber i.a. $W \cap W^\perp \neq \{0\}$, $W + W^\perp \neq V$, anders als im euklidischen Falle.

Definition 4.16 Ein Teilraum $W \subset V$ heißt symplektisch, wenn J , eingeschränkt auf W , nicht-ausgeartet ist.

Dann ist $W^\perp \cap W = \{0\}$ und $V = W \oplus W^\perp$ und auch W^\perp ist symplektisch.

Definition 4.17 Ein Teilraum $W \subset V$ heißt isotrop, wenn J auf W verschwindet.

Dies ist gleichwertig mit $W \subset W^\perp$.

Definition 4.18 Ein maximaler isotroper Teilraum heißt Lagrangescher Teilraum.

Das bedeutet, dass $x \in W^\perp \Rightarrow x \in W$, d.h. $W^\perp \subset W$, also $W = W^\perp$. Insbesondere ist dann $2 \dim W = \dim V$.

Definition 4.19 Ein Isomorphismus $S : (V_1, J_1) \rightarrow (V_2, J_2)$ heißt symplektisch, wenn

$$J_2(Sv, Sw) = J_1(v, w) \quad \forall v, w \in V_1.$$

Ein symplektischer Isomorphismus $S : (V, J) \rightarrow (V, J)$ heißt symplektische Transformation. Die Menge der symplektischen Transformationen von V bildet eine Gruppe $Sp(V)$. Wenn ϕ eine kanonische Transformation ist, dann ist $\phi_* : T_m P \rightarrow T_{\phi(m)} P$ ein symplektischer Isomorphismus.

Satz 4.20 In einem symplektischen Vektorraum der (geraden) Dimension $2n$ gibt es eine symplektische Basis $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$, so dass $J(e_i, e_j) = J(f_i, f_j) = 0$, $J(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

BEWEIS: Man wählt e_1 beliebig und f_1 so, dass $J(e_1, f_1) = 1$. Dann Induktion: W sei der von e_1 und f_1 aufgespannte symplektische Teilraum. Man geht zu W^\perp über und konstruiert e_2, f_2 usw. \square

Bezüglich einer symplektischen Basis ist J durch eine Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Aus dem Satz folgt die Isomorphie aller symplektischen Vektorräume derselben Dimension. Symplektische Transformationen sind bezüglich symplektischer Basen durch Matrizen S dargestellt, welche

$$S^t J S = J \quad \text{oder} \quad S^t = J S^{-1} J^{-1}$$

erfüllen. Hieraus folgt für die Eigenwerte symplektischer Transformationen

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda \mathbb{1}) = 0 &\iff \det(S^t - \lambda \mathbb{1}) = 0 \\ &\iff \det(S^{-1} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \\ &\iff \det(\lambda S - \mathbb{1}) = 0 \\ &\iff \det\left(S - \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Mit λ ist also auch $\frac{1}{\lambda}$ und (wegen der Realität von S) auch $\bar{\lambda}$ und $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ Eigenwert von S . S^n ist genau dann beschränkt, wenn alle Eigenwerte von S auf dem Einheitskreis liegen. Wenn alle Eigenwerte von S einfach sind und auf dem Einheitskreis liegen, dann ist dies auch für alle symplektischen Transformationen S' in einer genügend kleinen Umgebung von S der Fall.

Wir sehen, dass $\det S = 1$ gelten muss. Für $\dim V = 2$ gilt sogar $Sp(V) = SL(V)$, und die Eigenwerte ergeben sich aus der Gleichung $\lambda^2 + \lambda Sp(S) + 1 = 0$. Also haben wir Stabilität für $|Sp(S)| \leq 2$. Symplektische Transformationen sind nicht immer diagonalisierbar.

4.4 Lineare kanonische Transformationen und Gaußsche Optik

Anwendung: In linearen oder linearisierten Hamiltonschen Systemen ist die Zeitentwicklung durch symplektische (lineare) Isomorphismen gegeben. Wenn die Hamiltonfunktion eines linearen Hamiltonschen Systems eine periodische Zeitabhängigkeit mit der Periode T aufweist, dann ist $S = \phi_T$ eine symplektische Transformation. Die Bewegung ist stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von ϕ_T auf dem Einheitskreis liegen.

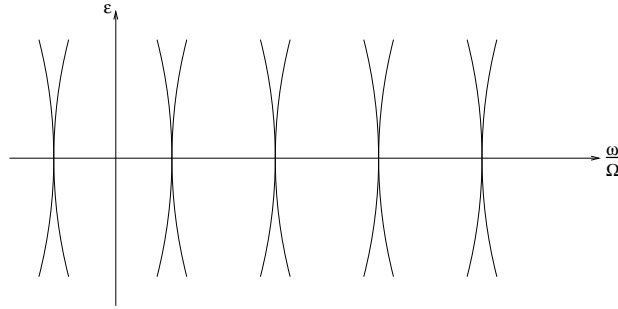
Beispiel: Sei $\dot{q} = p$, $\dot{p} + \omega^2(1 + \epsilon a(t))q = 0$, $a(t) = a(t + T)$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Stabilität für $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) \cos \omega t + p(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ p(t) &= -q(0) \omega \sin \omega t + p(0) \cos \omega t, \end{aligned}$$

also

$$S = \phi_T = \begin{pmatrix} \cos \omega T & \frac{1}{\omega} \sin \omega T \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix}, \quad Sp(S) = 2 \cos \omega T.$$

Also wird für $\epsilon = 0$ der Rand des Stabilitätsgebiets nur für $\omega T = k\pi$, d.h. $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{k}{2}$ erreicht (*Subharmonische Resonanz*). Für kleine endliche Werte von ϵ ergibt eine genauere Analyse folgendes qualitatives Bild für die Stabilitätsbereiche:



In den keilförmig sich mit wachsendem $|\epsilon|$ erweiternden Instabilitätsbereichen wird für noch so kleine Werte von $|\epsilon|$ die Amplitude unendlich mit der Zeit anwachsen (*Parametrische Resonanz*). Anwendungen finden sich z.B. im Synchrotron.

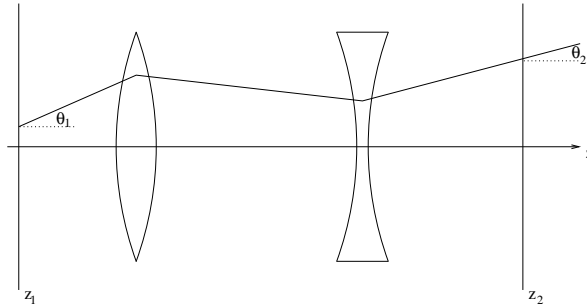
Aus der geometrischen Optik erhalten wir eine weitere

Anwendung: In der geometrischen Optik ergeben sich die Lichtstrahlen aus dem Fermatschen Prinzip:

$$\int n ds = \int n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} d\tau \stackrel{!}{=} \text{klein}$$

Hierbei ist $n(x, y, z) = c_0/c$ der Brechungsindex im Punkte (x, y, z) . In der Praxis haben optische Systeme gewöhnlich eine gerade optische Achse, die zugleich ein möglichst zentraler Lichtstrahl ist. Indem wir auf ihr eine Koordinate z einführen, erhält das Fermatsche Prinzip die Form

$$\int dz n(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \stackrel{!}{=} \text{klein}$$



Die Gleichung für die Lichtstrahlen lässt sich also auf Hamiltonsche Form bringen, wobei z die Rolle der Zeit spielt und die Impulse durch

$$p_x = \frac{n(x, y, z) \frac{dx}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} = n \sin \theta_x, \quad p_y = n \sin \theta_y$$

gegeben sind. θ_x und θ_y sind hierbei Winkel gegen die optische Achse. Die Transformation

$$(q(z_1), p(z_1)) \mapsto (q(z_2), p(z_2))$$

der Strahlkoordinaten $(q, p) = (\text{Durchstoßpunkt, Neigung})$ von der Ebene $z = z_1$ zur Ebene $z = z_2$, die durch das optische System vermittelt wird, ist also *kanonisch*. Wenn man sich auf achsennahe Strahlen

beschränkt, darf man linearisieren, und die Abbildung der Strahlkoordinaten ist durch eine symplektische Transformation S gegeben:

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = S_{21} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $p_{x,y} = n\theta_{xy} \approx n\sin\theta_{xy}$. Eine scharfe optische Abbildung von der z_1 -Ebene auf die z_2 -Ebene findet statt, wenn q_2 unabhängig von p_1 ist. Dann werden alle Strahlen durch q_1 auch durch q_2 gehen, die Wirkung hat also kein eindeutiges Minimum mehr. In diesem Fall heißen die Ebenen *konjugiert*. S_{21} hat dann die Form

$$S_{21} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

S_{21} heißt *teleskopisch*, wenn

$$S_{21} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

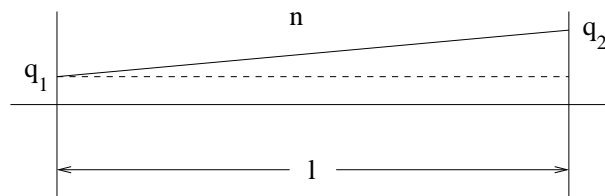
Als Komponenten eines optischen Systems kommen in Frage:

i.) Zwischenräume mit Brechungsindex n .

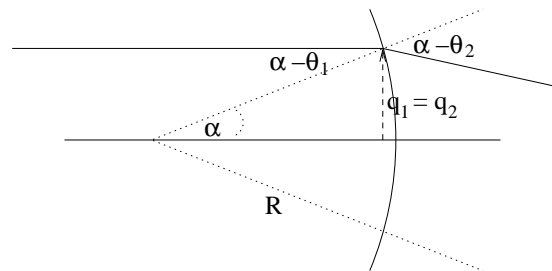
$$p_2 = p_1, \quad q_2 = q_1 + l\theta = q_1 + \frac{l}{n}p_1,$$

also

$$S^L = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & L\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L = \frac{l}{n}$$



ii.) Brechende Flächen (Spiegel sind wie brechende Flächen zu behandeln, nur dass sich an ihnen die optische Achse umkehrt). Wir beschränken uns auf rotationssymmetrische Flächen mit der optischen Achse der Normale und achsennahe Strahlen.



$$q_2 = q_1, \quad n_1(\alpha - \theta_1) = n_2(\alpha - \theta_2),$$

also

$$q_2 = q_1, \quad p_2 = p_1 + (n_2 - n_1)\alpha = p_1 + \frac{n_2 - n_1}{R}q_1$$

und

$$S^B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ B & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Beispiele: (Wir können wegen der Rotationssymmetrie mit 2×2 Matrizen arbeiten.)

i.) Hintereinanderschaltung von Linsen.

$$S^{L_1} \circ S^{L_2} = S^{L_1+L_2}, \quad S^{B_1} \circ S^{B_2} = S^{B_1+B_2},$$

$$S^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

ii.) System Zwischenraum - dünne Linse - Zwischenraum.

$$S_{21} = S^{L_2} \circ S^f \circ S^{L_1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L_2}{f} & L_1 + L_2 - \frac{L_1 L_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{L_1}{f} \end{pmatrix}$$

Abbildung für

$$L_1 + L_2 - \frac{L_1 L_2}{f} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{f} \quad (\text{Linsengleichung}).$$

iii.) System Linse - Zwischenraum - Linse.

$$S_{21} = S^{f_2} \circ S^L \circ S^{f_1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{L}{f_1 f_2} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{pmatrix}$$

Resultierende Brechkraft:

$$\frac{1}{f_{Res}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} \quad \left(= \frac{L}{f_2} \quad \text{für} \quad f_1 = -f_2 = f \right).$$

Sammel- und Zerstreulinse entgegengesetzter Stärke ergeben ein Sammelsystem (starke Fokussierung).

iv.) Normalform optischer Systeme.

Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nicht-teleskopisch, d.h. $c \neq 0$. Dann gibt es h_1 und h_2 , so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

h_1 und h_2 sind die Koordinaten der (zueinander konjugierten) *Hauptebenen*. Jedes nicht-teleskopische System ist durch eine Brennweite $-1/c$ und zwei Hauptebenen eindeutig bestimmt, und durch Zwischenräume und dünne Linsen realisierbar. Teleskopische Systeme werden durch Komposition mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ auf nicht-teleskopische zurückgeführt.

5 Exakt symplektische Phasenräume

5.1 Exakt symplektische Mannigfaltigkeiten

Definition 5.1 Eine exakt symplektische Mannigfaltigkeit (P, θ) ist eine Mannigfaltigkeit mit einer 1-Form θ , so dass $(P, -d\theta)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit ist.

Die symplektische Form $\omega = -d\theta$ einer exakt symplektischen Mannigfaltigkeit ist also nicht nur geschlossen ($d\omega = -dd\theta = 0$), sondern sogar exakt. Für $P = \mathbb{R}^{2n}$ folgt aus $d\alpha = 0$ immer, dass es ein β gibt $\alpha = d\beta$, im allgemeinen ist aber eine symplektische Mannigfaltigkeit nur lokal (in genügend kleinen Stücken) exakt symplektisch.

Definition 5.2 Ein Vektorfeld $X \in D^1(P)$ heißt exakt symplektisch, wenn $L_X \theta = 0$. Hieraus folgt auch $L_X \omega = -L_X d\theta = -dL_X \theta = 0$.

Definition 5.3 Ein Diffeomorphismus $\phi : M \rightarrow M$ heißt exakt symplektisch oder exakt kanonische Transformation, wenn $\phi^*\theta = 0$. Hieraus folgt auch $\phi^*\omega = -\phi^*d\theta = -d\phi^*\theta = -d\theta = \omega$.

Satz 5.4 Ein exakt symplektisches Vektorfeld X ist global hamiltonisch.

BEWEIS: Für ein exakt symplektisches Vektorfeld gilt $L_X\theta = 0$. Daraus folgt

$$i_X d\theta + di_X\theta = 0 \implies d\theta(X) = i_X\omega,$$

also

$$X = X_f \quad \text{mit} \quad f = \theta(X).$$

□

5.2 Kotangentenbündel

Es sei Q eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Tangentialbündel TQ und das Kotangentenbündel T^*Q wie folgt als $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Als Mengen ist

$$TQ = \{(m, v) | m \in Q, v \in T_m Q\}$$

die Kollektion aller Tangentialräume und

$$T^*Q = \{(m, \alpha) | m \in Q, \alpha \in T_m^* Q\}$$

die Kollektion aller Kotangentenräume, also der Dualräume aller Tangentialräume.

Atlanten auf TQ sind nun so definiert: Es sei \mathcal{A} ein Atlas von Q und (U, q, W) eine Karte aus \mathcal{A} mit Koordinatenfunktionen q^i . Dann sind Atlanten $(\tilde{U}, \tilde{q}, \tilde{W})$ von TQ und $(\tilde{U}^*, \tilde{q}^*, \tilde{W}^*)$ von T^*Q gegeben durch

$$\tilde{U} = \{(m, v) | m \in U, v \in T_m Q\}, \quad \tilde{W} = W \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{q}(m, v) = (q(m), dq|_m(v)),$$

beziehungsweise

$$\tilde{U}^* = \{(m, \alpha) | m \in U, \alpha \in T_m^* Q\}, \quad \tilde{W}^* = W \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{q}^*(m, \alpha) = \left(q(m), \alpha \left(\frac{\partial}{\partial q} \Big|_m \right) \right).$$

Mit $\alpha = \sum p_i dq^i|_m$ ist $\alpha(\partial/\partial q^i|_m) = p_i$, und (q^i, p_i) sind Koordinaten auf T^*Q . Es gibt Projektionsabbildungen

$$TQ \longrightarrow Q, \quad (m, v) \longmapsto m, \quad \text{bzw.}$$

$$\pi : T^*Q \longrightarrow Q, \quad \pi(m, \alpha) = m.$$

Wie haben in Kapitel 3 gesehen, dass zu einer Abbildung $\phi : M \rightarrow N$ Abbildungen $\phi_* : T_m M \rightarrow T_{\phi(m)} N$ gehören. Also gibt es eine Projektion

$$\pi_* : TT^*Q \longrightarrow T^*Q.$$

Für Kotangentenbündel gilt nun der wichtige

Satz 5.5 Auf dem Kotangentenbündel T^*Q einer Mannigfaltigkeit Q existiert eine natürliche exakt-symplektische Struktur. Zu jedem Atlas von Q gehört ein Darboux-Atlas von T^*Q .

BEWEIS: Wir müssen die 1-Form θ angeben, die T^*Q zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit macht. Im Punkte $(m, \alpha) \in T^*Q$ und für $w \in T_{(m, \alpha)} T^*Q$ definieren wir

$$\theta_{(m, \alpha)}(w) = \alpha(\pi_* w) = (\pi_* \alpha)(w).$$

Ausgedrückt in Koordinaten (q, p) auf T^*Q bedeutet das

$$\alpha = \sum p_i dq^i|_m, \quad w = \sum a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(m, \alpha)} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{(m, \alpha)}, \quad \pi_* w = \sum a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_m,$$

und

$$\theta_{(m, \alpha)}(w) = \sum p_i a^i,$$

also

$$\theta = \sum p_i dq^i$$

und

$$\omega = -d\theta = \sum dq^i \wedge dp_i.$$

□

Exakt symplektische Transformationen schreiben sich in Darboux-Koordinaten $\phi(q, p) = (Q, P)$. Hierbei ist Q eine Koordinate und nicht mit der Mannigfaltigkeit Q zu verwechseln. Die Transformationen müssen die Bedingung

$$\theta = \sum P_i dQ^i = \sum p_i dq^i = \phi^* \theta$$

erfüllen, also

$$\sum_{i,j} P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} dq^j + \sum_{i,j} P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} dp_j = \sum p_i dq^i.$$

Das bedeutet, dass

$$\frac{\partial Q^i}{\partial p_j} = 0, \quad \text{also} \quad Q = Q(q),$$

und dass

$$p_i = \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \quad \text{oder} \quad P_i = \sum_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} p_j.$$

Die exakt symplektischen Transformationen $T^*Q \rightarrow T^*Q$ sind gerade die kanonischen Transformationen auf T^*Q , die von Transformationen auf Q induziert werden.

5.3 Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik

Die Beziehungen zwischen Lagrangescher und Hamiltonscher Mechanik können wir nun in der Sprache symplektischer Mannigfaltigkeiten formulieren: Die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ lässt sich global als eine Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentenbündel des Konfigurationsraumes Q auffassen, ausgedrückt durch die Koordinaten $q(m)$, so dass $\dot{q}(m) \in T_m Q$. Dann ist $\partial L / \partial \dot{q}$ eine lineare Abbildung $T_m Q \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Element von $T_m^* Q$, so dass durch $(q, \dot{q}) \mapsto (q, \partial L / \partial \dot{q})$ eine Abbildung

$$FL : TQ \longrightarrow T^*Q$$

definiert ist. Diese Abbildung, die so genannte Faserableitung, ist ein lokaler Diffeomorphismus, wenn lokal überall die Legendretransformation von $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ auf $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ durchführbar ist, und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit der symplektischen Form $\omega = -d\theta$.

5.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wir haben folgendes gesehen: Wenn ein Hamiltonsches (und also symplektisches) Vektorfeld X_f die Hamiltonfunktion fest lässt, $X_f H = 0$, d.h. eine Symmetrietransformation des Hamiltonschen Systems erzeugt, dann ist f erhalten, $\{X_f, H\} = X_H f = df/dt = 0$. Wenn man in diesem Sinne f als infinitesimale Erzeugende einer kanonischen Transformation auffasst, so ergibt sich, dass die Erzeugende f einer kanonischen Symmetrietransformation eines (zeitunabhängigen) Hamiltonschen Systems eine erhaltene Größe ist. Für exakt kanonische Symmetrietransformationen ergibt sich dann eine Beziehung zum elementaren Noetherschen Theorem: Exakt kanonische Transformationen werden von Hamiltonschen Vektorfeldern X_f mit $f = \theta(X)$ erzeugt. Im Symmetriefalle ist die Erhaltungsgröße

$$\theta(X) = \sum_i p_i dq^i \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \sum p_i \eta^i = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i$$

mit der Erhaltungsgröße des Noetherschen Theorems identisch.

5.5 Kanonische Transformationen in Darboux'schen Koordinaten

Wir beschränken uns auf den (lokal stets vorliegenden) exakt symplektischen Fall. $\phi^*\omega = \omega$ bedeutet dann $\phi^*d\theta - d\theta = d(\phi^*\theta - \theta) = 0$ oder, lokal, $\phi^*\theta - \theta = dF$ mit einer geeigneten Funktion F . In Darboux-Koordinaten schreibt sich dies als

$$\sum dQ^i \wedge dP_i = \sum dq^i \wedge dp_i, \quad \sum (p_i dq^i - P_i dQ^i) = dF.$$

Es ist eine andere sehr nützliche Deutung dieser Formeln möglich.

$$\Omega = \sum (dq^i \wedge dp_i - dQ^i \wedge dQ^i)$$

lässt sich als symplektische Form auf dem kartesischen Produkt $P \times P$ der symplektischen Mannigfaltigkeit mit sich selbst auffassen. Die Transformation $\phi : P \rightarrow P$ ist genau dann kanonisch, wenn Ω , eingeschränkt auf den Graphen $\{(m, \phi(m)) | m \in P\} \subset P \times P$ von ϕ verschwindet, wenn der Graph von ϕ also Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von $P \times P$ ist. Wenn sich auf dem Graphen die Koordinaten (q, Q) einführen lassen, dann sind kanonische Transformationen gekennzeichnet durch

$$\sum (p_i dq^i - P_i dQ^i) = dF(q, Q),$$

also

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}.$$

Durch Auflösen nach Q, P lässt sich hieraus die kanonische Transformation bestimmen. F heißt Erzeugende der kanonischen Transformation (nicht zu verwechseln mit der oben eingeführten infinitesimalen Erzeugenden f zu X_f).

Beispiel:

$$F(q, Q) = \sum q^i Q^i \implies Q^i = p_i, \quad P_i = -q^i.$$

Das ist wirklich eine kanonische Transformation.

Die Einheitstransformation $q = Q, p = P$ hat keine solche Erzeugende $F(q, Q)$. Hier ist es zweckmäßig, q und P als Koordinaten vom Graph ϕ zu wählen. Kanonische Transformationen sind jetzt gekennzeichnet durch

$$\sum (p_i dq^i - P_i dQ^i + d(P_i Q^i)) = \sum (p_i dq^i + Q^i dP_i) = dG(q, P),$$

also

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

Beispiele:

i.) Einheitstransformationen:

$$G(q, P) = \sum q^i P_i \implies Q^i = q^i, \quad P_i = p_i$$

ii.) Exakt kanonische Transformationen:

$$G(q, P) = \sum P_i g^i(q) \implies Q^i = g^i(q), \quad P_i = \sum_j P_j \frac{\partial g^j}{\partial q^i}$$

iii.) Infinitesimale kanonische Transformationen:

$$\begin{aligned} G(q, P) &= \sum q^i P_i + \epsilon f(q, P) \\ \implies Q^i &= q^i + \epsilon \frac{\partial f}{\partial P_i}(q, P) = q^i + \epsilon \frac{\partial f}{\partial p_i}(q, p) + o(\epsilon) = q^i + \epsilon X_f q^i + o(\epsilon) \\ P_i &= p_i - \epsilon \frac{\partial f}{\partial q^i}(q, P) = p_i - \epsilon \frac{\partial f}{\partial q^i}(q, p) + o(\epsilon) = p_i + \epsilon X_f p^i + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Also ist f gerade die infinitesimale Erzeugende im oben beschriebenen Sinne.

6 Die Methode von Hamilton und Jacobi

Wir wissen, dass kanonische Transformationen die Form der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen nicht ändern:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{q}, \quad \iff \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -\dot{P}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = -\dot{Q}, \quad \text{mit} \quad \tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)).$$

Wir suchen nun eine kanonische Transformation, so dass \tilde{H} nur von P abhängt. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 = -\dot{P}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = -\dot{Q}$$

werden dann trivial lösbar:

$$P = \text{const.}, \quad Q(t) = Q_0 + t \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}(P).$$

Um nun die kanonische Transformation zu finden, setzen wir eine Erzeugende $W(q, P)$ an. Dann muss gelten:

$$H \left(\frac{\partial W(q, P)}{\partial q}, q \right) \Big|_{q=q(Q, P), p=p(Q, P)} = \tilde{H}(P)$$

oder, da Q beliebig,

$$H \left(\frac{\partial W(q, P)}{\partial q}, q \right) = \tilde{H}(P) = E(P) = \text{const.}$$

Das ist die Differentialgleichung von Hamilton und Jacobi, eine (nicht-lineare) partielle Differentialgleichung für W . Überraschenderweise ist dieser Umweg über eine partielle Differentialgleichung die wirksamste Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen.

Alle überhaupt gelösten Bewegungsgleichungen sind auch auf diese Weise lösbar. Wenn es gelingt, eine Schar $W(q, P)$ von Lösungen der Hamilton-Jacobi-Bewegungsgleichungen zu finden, die von $n = \frac{1}{2} \dim P$ unabhängigen Parametern abhängt (eine solche Schar heißt vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung), dann ergibt sich die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$Q(q, P) = \frac{\partial W(q, P)}{\partial P} = Q_0 + t \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}(P)$$

und hieraus durch Auflösung $q(t, Q_0, P)$ und

$$p(t, Q_0, P) = \frac{\partial W(q, P)}{\partial q} \Big|_{q=q(t, Q_0, P)}.$$

Man erhält also eine $2n$ -parametrische Schar von Lösungen.

Beispiele:

i.) Eindimensionales System.

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW(q, E)}{dq} \right)^2 + V(q) = E.$$

Wähle Parameter $P = E$:

$$W(q, E) = \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2m(E - V(q'))},$$

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{E - V(q')}} = Q_0 + t.$$

Freier Fall:

$$V(q) = mgq$$

$$Q = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{E - V(q')}} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{g} \sqrt{E - mgq} + \text{const.} = Q_0 + t$$

$$E - mgq = \frac{m}{2} g^2 (t - t_0)^2 \implies q(t) = \frac{E}{mg} - \frac{g}{2} (t - t_0)^2.$$

ii.) Zentralkraftproblem (in Polarkoordinaten).

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - V(r)$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2) + V(r).$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + V(r) = E = \text{const.}$$

Diese Gleichung hat eine dreiparametrische Schar von Lösungen der separierten Form

$$W(r, \theta, \varphi) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi).$$

Einsetzen dieses Ansatzes ergibt nämlich die leicht lösbaren Differentialgleichungen

$$\frac{dW_\varphi}{d\varphi} = l_\varphi = \text{const.}$$

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{l_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = l_\theta^2 = \text{const.}$$

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{l_\theta^2}{r^2} \right\} + V(r) = E = \text{const.}$$

Allgemein heißt ein Hamiltonsches System separabel, wenn es Koordinaten gibt, so dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung separable Lösungen aufweist. Wir haben gesehen, dass folgende Implikationen gelten:

- (i) Separabilität \implies (ii) Existenz einer vollständigen Lösung $W(q, P)$
 \implies (iii) Hamiltonfunktion von der Form $\tilde{H}(P)$, also nur von P abhängig.

Weiterhin gilt natürlich (iii) \implies (i), da in diesem Falle die Hamilton-Jacobi-Gleichungen separabel sind:

$$\tilde{H} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right) = \text{const.} \quad \text{hat Lösungen} \quad W = \sum P_i q^i.$$

Das ist gerade die Erzeugende der Einheitstransformation. Also sind (i), (ii) und (iii) gleichwertig. Das Hamilton-Jacobische Verfahren hat in dieser Form allerdings nur rein lokale Bedeutung, und die Schwierigkeit besteht gerade darin, Koordinaten zu finden, in denen die Hamilton-Jacobi-Gleichungen separieren. Lokal gibt es übrigens immer Darboux-Koordinaten mit $H = P_1$ in der Umgebung eines jeden Punktes, in dem $dH \neq 0$.

Wenn das Hamilton-Jacobische Verfahren global sinnvoll ist, dann sind die erhaltenen Größen P_i nicht nur Koordinaten, sondern n global definierte Erhaltungsgrößen in Involution, d.h. unabhängige Erhaltungsgrößen mit $\{P_i, P_j\} = 0$. In diesem Fall, der ein seltener Ausnahmefall ist, werden die Lösungskurven auf die simultanen Niveaulächen der Erhaltungsgrößen beschränkt bleiben. Wir werden bald sehen, dass in der Tat (mit kleinen technischen Zusatzvoraussetzungen) aus der Existenz von $n = \frac{1}{2} \dim P$ Erhaltungsgrößen in Involution folgt, dass das Hamilton-Jacobische Verfahren im globalen Sinne durchführbar ist.

Die Funktion W hat eine interessante physikalische Bedeutung. Aus

$$dW = pdq + QdP$$

folgt, dass

$$W = \int_{q_0}^q (pdq + QdP)$$

unabhängig ist vom Integrationsweg γ . Wählen wir nun als Integrationsweg die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, so ist $dP = 0$ und

$$W(q, q_0) = \int_{q_0}^q (pdq),$$

also

$$W(q, q_0) = \int_{q_0}^q (p\dot{q} - H)dt + Et = \int_{q_0}^q L(q, \dot{q})dt + Et.$$

$W(q, q_0)$ ist bis auf einen Beitrag Et der extremale Wert des Wirkungsfunktional, der gerade dann angenommen wird, wenn die Bahnkurve von q_0 nach q eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

7 Integrable Systeme

7.1 Vollständig integrable Systeme

Definition 7.1 Ein Hamiltonsches System (P, ω, H) heißt vollständig integrabel, wenn es $n = \frac{1}{2} \dim P$ C^∞ -Funktionen F_1, \dots, F_n auf P gibt, die folgenden Bedingungen genügen:

- i.) $\{H, F_i\} = 0$ (F_i sind Integrale)
- ii.) $\{F_i, F_j\} = 0$ (F_i stehen in Involution)
- iii.) $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ fast überall (F_i sind funktional unabhängig)

Da die Funktionen F_i Konstanten der Bewegung sind, verläuft eine Bahnkurve auf einer Fläche

$$M_{\vec{f}} = \{p \in P : F_i(p) = f_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Aus den Bedingungen für ein vollständig integrables System folgt für $M_{\vec{f}}$:

- i.) Die zu F_i gehörenden Vektorfelder X_{F_i} sind tangential zu $M_{\vec{f}}$, d.h. $dF_i(X_{F_j}) = \{F_i, F_j\} = 0$.
- ii.) $M_{\vec{f}}$ ist eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von P . Aus der linearen Unabhängigkeit der dF_i folgt nämlich $\dim M_{\vec{f}} = n$, also bilden die X_{F_i} an jedem Punkt eine Basis für den Tangentialraum. Auf $M_{\vec{f}}$ gilt aber, dass $\omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = \{F_i, F_j\} = 0$.
- iii.) H ist funktional abhängig von F_i , d.h. $H = H(F_i)$. Andernfalls wäre nämlich $dH \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ und ω verschwände auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n + 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man also $H = F_1$ annehmen.

Vollständig integrable Systeme besitzen eine einfache Struktur, die charakterisiert ist durch das *Theorem von Arnold*:

Satz 7.2 Sei (P, ω, H) vollständig integrabel mit Integralen F_1, \dots, F_n . Sei ferner $M_{\vec{f}}$ regulär kompakt und zusammenhängend. Dann gilt:

- i.) $M_{\vec{f}}$ ist diffeomorph zum n -dimensionalen Torus:

$$M_{\vec{f}} \cong \mathcal{T}^n \cong \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\}.$$

- ii.) Der Phasenfluss zur Hamiltonfunktion H auf $M_{\vec{f}}$ ist bedingt periodisch. Ein Fluss ϕ_t heißt bedingt periodisch, wenn er diffeomorph ist zu der Abbildung

$$T^n \longrightarrow T^n, \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \longmapsto (\varphi_1 + \omega_1 t, \dots, \varphi_n + \omega_n t).$$

iii.) Sind in einer Umgebung von $\vec{f}_o \in \mathbb{R}^n$ alle $M_{\vec{f}}$ kompakt, regulär und zusammenhängend, so lassen sich durch Quadraturen Darboux-Koordinaten $(\varphi_i, I_i), i = 1, \dots, n$ einführen (Wirkungs- und Winkelvariable), so dass $H = \tilde{H}(I)$.

Zum Beweis benutzen wir den folgenden

Satz 7.3 Sei G eine Gruppe, die transitiv auf eine Mannigfaltigkeit M wirkt, d.h. zu je zwei $x_0, x_1 \in M$ existiert ein $g \in G$ mit $x_1 = gx_0$. Sei Γ die Untergruppe, die einen Punkt $x_0 \in M$ invariant lässt: $\Gamma x_0 = x_0$. Dann gilt:

$$M \cong M/G.$$

Die Beweisidee des Theorems von Arnold ist nun folgende:

BEWEIS: Man betrachte die Flüsse $\phi_t^{X_{F_i}}$ zu den Funktionen F_i . Sie kommutieren wegen $\omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = 0$ und bilden $M_{\vec{f}}$ in sich selbst ab, da X_{F_i} tangential zu $M_{\vec{f}}$ ist. Dann beschreibt $\phi_{\vec{t}} := \phi_{t_1}^{X_{F_1}} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{X_{F_n}}$ eine Wirkung der additiven Gruppe $\mathbb{R}^n = \{(t_1, \dots, t_n) = \vec{t}\}$ auf $M_{\vec{f}}$:

$$\phi_{\vec{t}} : M_{\vec{f}} \rightarrow M_{\vec{f}}, \quad x \mapsto \phi_{\vec{t}}x, \quad x \in M_{\vec{f}}.$$

Über $\phi_{\vec{t}}$ wirkt \mathbb{R}^n transitiv auf $M_{\vec{f}}$. Da $M_{\vec{f}}$ zusammenhängend ist, lassen sich nämlich je zwei Punkte durch einen Weg verbinden, und da $M_{\vec{f}}$ kompakt ist, lässt sich dieser Weg durch endlich viele Karten überdecken. Innerhalb einer genügend kleinen Karte um einen Punkt x ist nun die Abbildung von \mathbb{R}^n in $M_{\vec{f}}$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \phi_{\vec{t}}x$, wegen der Unabhängigkeit der F_i ein Diffeomorphismus. Die Untergruppe von \mathbb{R}^n , die einen festen Punkt auf $M_{\vec{f}}$ invariant lässt, muss diskret sein, da die Abbildung lokal ein Diffeomorphismus ist. Die einzigen diskreten Untergruppen von \mathbb{R}^n sind

$$\Gamma^k : \{x \in \mathbb{R}^n : x = m_1 \vec{e}_1 + \dots + m_k \vec{e}_k, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad \vec{e}_i \text{ linear unabhängig}\}.$$

Da $M_{\vec{f}}$ kompakt sein soll, ist $k = n$ und es folgt

$$M_{\vec{f}} \backslash \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = T^n.$$

Zum Beweis des zweiten Teils des Arnoldschen Theorems konstruieren wir eine Winkelvariable auf $M_{\vec{f}}$ und die dazu kanonisch konjugierte Wirkungsvariable in P explizit: Sei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis für Γ^k , die Untergruppe von \mathbb{R}^n , die $M_{\vec{f}}$ invariant lässt. Dann definiert

$$\tilde{\gamma} : T^n \rightarrow M_{\vec{f}}, \quad \phi = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1 \vec{e}_1, \dots, \varphi_n \vec{e}_n) x_0$$

Winkelkoordinaten in $M_{\vec{f}}$. Der Referenzpunkt x_0 in $M_{\vec{f}}$ (Ursprung) soll eine C^∞ -Funktion der f_i sein. Um die Wirkungsvariablen I^i , die kanonisch konjugierten Variablen zu φ_i , zu erhalten, betrachten wir die generierende Funktion $W(q, I)$ zu der Transformation $(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$:

$$\frac{\partial W}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial I_i} = \varphi_i.$$

Obwohl die genaue Abhängigkeit der Funktion $W(q, I)$ von I noch nicht bekannt ist, wissen wir aus ihrer Definition, dass

$$\frac{\partial W}{\partial I_i} = \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{q_0}^q pdq = \varphi^i(q) - \varphi^i(q_0),$$

sofern der Integrationsweg ganz auf $M_{\vec{f}}$ liegt, denn auf $M_{\vec{f}}$ ist $dI = 0$, also ist pdq eine exakte 1-Form und das Integral ist wegunabhängig. Sei nun γ_i ein geschlossener Weg auf $M_{\vec{f}}$ zur Winkelkoordinate φ_i ($\varphi_j = \text{const.}, j \neq i$), dann folgt:

$$\frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{\gamma_i} pdq = 2\pi \implies I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} pdq.$$

Damit sind die zu den Winkelvariablen kanonisch konjugierten Wirkungsvariablen I gefunden. Die Bedingungen $I^i = \text{const.}$ legen ebenso die Mannigfaltigkeit $M_{\vec{f}}$ fest wie $F_i = \text{const.}$. Somit gibt es Funktionen $F_i = F_i(I)$ und insbesondere $H = H(I)$. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \tilde{H}(I)}{\partial \varphi_i} = 0 = -\dot{I}_i, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I^i} = \dot{\varphi}_i := \omega_i$$

sind leicht zu integrieren:

$$I^i = \text{const.}, \quad \varphi_i = \omega_i t + \varphi_i^0.$$

Die Bewegungsgleichungen zum Hamiltonschen Fluss sind also bedingt periodisch. Sei $\hat{W}(q, P)$ die reduzierte Wirkung, also ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Dann folgt

$$I^i = \oint_{\gamma_i} \frac{\partial \hat{W}}{\partial q_i} dq_i.$$

Beispiel: Der n -dimensionale harmonische Oszillator. Sei

$$H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{2} \sum \omega_i^2 q_i^2$$

die Hamiltonfunktion des n -dimensionalen harmonischen Oszillators und

$$F_i = \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2.$$

Die Bedingungen für ein vollständig integrables System sind leicht nachzuweisen. In der p_i - q_i -Ebene beschreibt die Gleichung

$$f_i = \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2$$

eine Ellipse. Somit ist

$$M_{\mathcal{F}} = \left\{ (q, p) : \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 = f_i, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

das topologische Produkt von n Ellipsen, also isomorph zu T^n . Die Wirkungsvariablen sind

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p_i dq^i = \frac{f_i}{\omega_i},$$

welche die Bedeutung der Fläche der Ellipse haben. Die Wirkungsvariablen sind (lokal)

$$\varphi_i = -\arctan \frac{p_i}{\omega q_i} + \text{const.}$$

Für die Hamiltonfunktion folgt:

$$\tilde{H}(I) = \sum \omega_i I_i.$$

Die Bewegung ist bedingt periodisch, allerdings ist die Bahnkurve auf $M_{\mathcal{F}}$ nur geschlossen, wenn die Frequenzen ω_i in rationalem Verhältnis zueinander stehen.

7.2 Störungen von integrablen Systemen: Das KAM-Theorem

Es sei ein integrables System in Wirkungs- und Winkelvariablen gegeben durch $H = H_0(I)$ mit den Bewegungsgleichungen

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} = \omega_i(I), \quad i = 1, \dots, n.$$

Nach Einführung einer kleinen Störung

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(\varphi, I)$$

wird das System i.a. nicht mehr vollständig integrabel sein. Das KAM-Theorem besagt jedoch, dass dennoch für kleine Werte von ϵ 'die meisten' Tori, auf die die Phasenraumtrajektorien für $\epsilon = 0$ beschränkt sind, nur deformiert, nicht aber vollständig zerstört werden.

Zur Orientierung wenden wir zunächst auf $H = H_0 + \epsilon H_1$ die Hamilton-Jacobi-Theorie an und versuchen, formal Wirkungs- und Winkelvariable bezüglich H einzuführen. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet dann

$$H_0 \left(\frac{\partial W(\varphi, I')}{\partial \varphi} \right) + \epsilon H_1 \left(\varphi, \frac{\partial W(\varphi, I')}{\partial \varphi} \right) = \tilde{H}(I').$$

Mit dem Ansatz

$$W(\varphi, I') = \sum_i \varphi_i I'_i + \epsilon W_1(\varphi, I')$$

ergibt sich in nullter und erster Ordnung in ϵ

$$H_0(I') = \tilde{H}(I') \quad \text{und} \quad \sum \omega_i \frac{\partial W_1}{\partial \varphi_i} + H_1(\varphi, I') = 0.$$

Die zweite Gleichung versuchen wir mit einem Fourieransatz zu lösen

$$H_1 = \sum_{\vec{n} \neq 0} H_{\vec{n}}(I') e^{i\vec{n} \cdot \vec{\varphi}}, \quad W_1 = \sum_{\vec{n} \neq 0} W_{\vec{n}}(I') e^{i\vec{n} \cdot \vec{\varphi}}$$

und erhalten

$$W_{\vec{n}}(I') = \frac{i}{\vec{n} \cdot \vec{\omega}}.$$

Wenn die Frequenzen ω_i auf einem ungestörten Torus kommensurabel sind, dann gibt es einen ganzzahligen Vektor \vec{n} mit $\vec{n} \cdot \vec{\omega} = 0$, und die Entwicklung nach ϵ ist unmöglich. Dies ist das sogenannte Problem der kleinen Nenner, das für rationale Frequenzverhältnisse auftritt und sich auch bei 'nicht genügend' irrationalen Frequenzverhältnissen bemerkbar macht, für die bei rationaler Approximation

$$\frac{m_k}{s_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_i}{\omega_j}$$

m_k und s_k nicht rasch genug anwachsen. Eine genaue Analyse führt auf das KAM-Theorem, das wir der Einfachheit halber für $n = 2$ formulieren:

Satz 7.4 *Es sei $\det \frac{\partial \omega_i}{\partial I_k} \neq 0$. Dann gibt es (unter gewissen technischen Bedingungen) ein $k(\epsilon) > 0$ mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k(\epsilon) = 0$, so dass alle Tori von H_0 , für welche die Bedingung*

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s} \right| > \frac{k(\epsilon)}{s^{5/2}}$$

erfüllt ist, durch die Störung ϵH_1 nur deformiert aber nicht aufgelöst werden. Frequenzverhältnisse $0 < \frac{\omega_1}{\omega_2} < 1$, die der obigen Bedingung genügen, wollen wir hinreichend irrational nennen. Die nicht hinreichend irrationalen Frequenzverhältnisse haben im Intervall $[0, 1]$ ein Maß

$$L(\epsilon) < \sum_s \frac{k(\epsilon)}{s^{5/2}} s = C k(\epsilon).$$

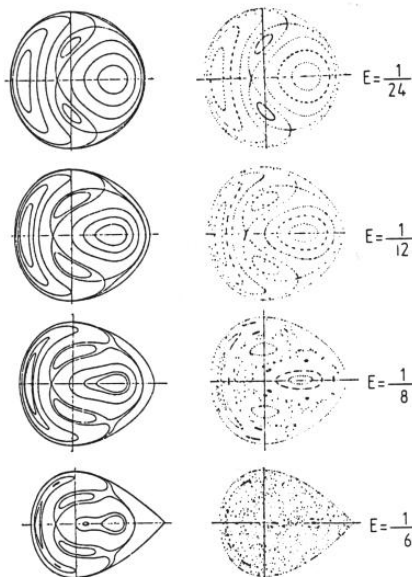
Also gilt $L(\epsilon) \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$.

Anwendung: Lücken im Asteroidengürtel bei Kommensurabilität mit Jupiterumlaufzeit, Lücken zwischen den Saturnringen.

Beispiel: Das Hénon-System

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + (q_1^2 + q_2 - \frac{q_2^3}{3}).$$

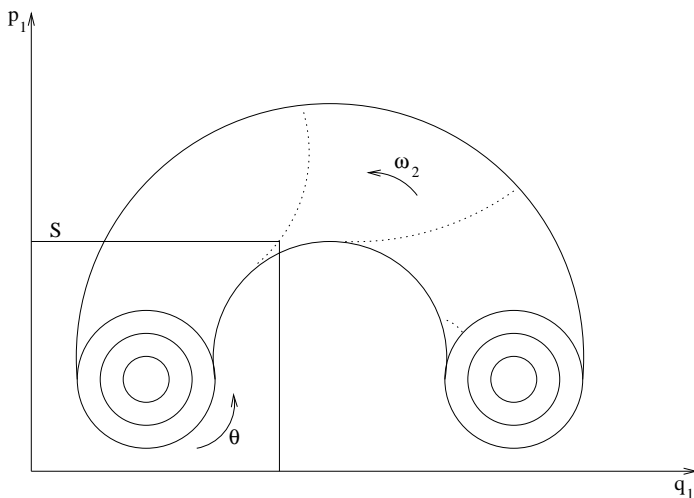
Für kleine Energien ist der anharmonische Zusatzterm klein. Man kann die Energie E direkt anstelle des Parameters ϵ nehmen.



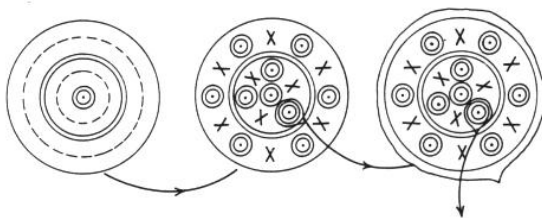
Für das qualitative Verhalten der Trajektorien auf den $2n - 1$ -dimensionalen Energieflächen ist die Zahl n der Freiheitsgrade bedeutsam. Systeme mit $n = 1$ sind immer integrabel. Für $n = 2$ haben die Energieflächen Dimension $d = 3$. Die nach dem KAM-Theorem für genügend kleine Störung noch vorhandenen Tori sind 2-dimensional und zerlegen die Energieflächen in Teilmengen, die von den Trajektorien nicht mehr verlassen werden können. Für $n \geq 3$ ist eine solche Zerlegung von $2n - 1$ -dimensionalen Flächen durch n -dimensionale Tori nicht mehr möglich. Man erwartet eher ergodisches Verhalten auf den Energieflächen ('Arnol'd-Diffusion' für $n \geq 3$).

Wir wollen noch auf das Schicksal der rationalen Tori unter dem Einfluss der Störung ϵH_1 eingehen. Hierzu beschränken wir uns wieder auf den Fall $n = 2$. Indem wir die Tori des ungestörten Falles mit der q_1 - p_1 -Ebene schneiden, erhalten wir die Poincaré-Abbildung T , welche angibt, wo in der Ebene ein Punkt nach einem Umlauf längs der Tori ankommt. In geeigneten Koordinaten ist

$$T(r, \varphi) = (r, \varphi + 2\pi\alpha(r)) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$



Für einen rationalen Torus ist $\alpha(r_0) = \frac{m}{s}$, und alle Punkte in der Ebene mit $r = r_0$ sind Fixpunkte der s -fachen iterierten Abbildung T^s . Nach Einschalten der Störung ϵH_1 geht die Poincaré-Abbildung T in eine Abbildung T_ϵ über, die flächenerhaltend ist, da die Zeitentwicklung eine kanonische Transformation induziert. T_ϵ^s hat dann nicht mehr einen ganzen Kreis $r = r_0$ von Fixpunkten, sondern, wie sich zeigen lässt, im generischen Fall isolierte Fixpunkte in der Nähe von $r = r_0$, die abwechselnd stabil und instabil sind. In der Nähe der stabilen Fixpunkte liegen dann die Schnitte neuer Tori mit der q_1 - p_1 -Ebene. Auf diese Tori lässt sich das soeben beschriebene Argument erneut anwenden. es ergibt sich ein kompliziertes Muster von Tori und Instabilitäten, das sich auf verschiedenen, immer kleiner werdenden Skalen selbst ähnlich bleibt.



In der Abbildung entsprechen durchgezogene Linien stabilen irrationalen Tori, und gestrichelte Linien bezeichnen instabile, rationale Tori.

8 Kontaktmannigfaltigkeiten und zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Theorie

Kontaktmannigfaltigkeiten sind die ungerad-dimensionalen Gegenstücke zu symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Definition 8.1 Eine Kontaktmannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit M , auf der eine Zweiform ω definiert ist, so dass $d\omega = 0$ und für alle $m \in M$ der Ausartungsraum $A_m \subset T_m M$ von $\omega(m)$ eindimensional ist.

Kontaktmannigfaltigkeiten haben immer ungerade Dimension.

Definition 8.2 Eine Kontakttransformation zwischen Kontaktmannigfaltigkeiten (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) ist eine glatte Abbildung $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ mit $\phi^* \omega_2 = \omega_1$.

Ganz analog definiert man exakte Kontaktmannigfaltigkeiten und exakte Kontakttransformationen.

Definition 8.3 Ein Vertexfeld auf einer Kontaktmannigfaltigkeit ist ein Vektorfeld $X \in D^1(M)$ mit $i_X \omega = 0$, d.h. $X(m)$ liegt für alle $m \in M$ im Ausartungsraum.

Mit X ist auch $f \cdot X$ ein Vektorfeld für alle $f \in C^\infty(M)$.

Satz 8.4 Vertexfelder erzeugen Kontakttransformationen $(M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$.

BEWEIS: $L_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega = 0$. □

Beispiele:

- i.) Reguläre Energiehyperflächen $P_H = \{m \in P : H(m) = E\}$ einer symplektischen Mannigfaltigkeit.
- ii.) Erweiterte Phasenräume. Sei (P, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Auf dem kartesischen Produkt $\tilde{P} = P \times \mathbb{R}$ ist für jede Funktion $H : \tilde{P} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Kontaktform

$$\omega_H = \omega_0 + dH \wedge dt$$

definiert, wobei $\omega_0 = \pi_1^* \omega$ und $\pi_1 : P \times \mathbb{R} \rightarrow P$ die Projektion auf den ersten Faktor ist. Im exakten Fall ist $\omega_H = -d\theta_H$ mit $\theta_H = \theta_0 - Hdt$. Wenn man in P Darboux-Koordinaten einführt, dann ist

$$\omega_H = \sum dq^i \wedge dp^i + dH \wedge dt \quad \text{und} \quad \theta_H = \sum p_i dq^i - Hdt.$$

Wir beschäftigen uns im folgenden nur noch mit erweiterten Phasenräumen. Es sei $H : \tilde{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei X_{H_t} das (t -abhängige) Hamiltonsche Vektorfeld auf P . X_{H_t} kann man auch als Vektorfeld auf \tilde{P} auffassen: In $(X_{H_t}, f)(m, t)$ wirkt X_{H_t} nur auf das erste Argument m . Nun gilt der wichtige

Satz 8.5 $\tilde{X}_H = \frac{\partial}{\partial t} + X_{H_t}$ ist ein Vertexfeld von (\tilde{P}, ω_H) .

BEWEIS:

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}_H} \omega_H &= i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega_0 + i_{X_{H_t}} \omega_0 + i_{\frac{\partial}{\partial t}} dH \wedge dt + i_{X_{H_t}} dH \wedge dt \\ &= 0 + dH_t - dH_t + \{H_t, H_t\} dt = 0. \end{aligned}$$

□

Hierbei haben wir $dH \wedge dt = dH_t \wedge dt$ ausgenutzt und in der Schreibweise einige offensichtliche Identifizierungen vorgenommen. Durch die obige Normierung ist überdies das Vertexfeld \tilde{X}_H eindeutig bestimmt. Die Gleichungen für den Fluss von \tilde{X}_H in \tilde{P} sind offenbar den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für das (eventuell zeitabhängige) Hamiltonsche Vektorfeld X_{H_t} auf P äquivalent.

Definition 8.6 Eine zeiterhaltende Kontakttransformation $\phi : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$ auf dem erweiterten Phasenraum ist eine Transformation der Form

$$\phi(m, t) = (\phi_t(m), t) \quad \text{mit} \quad \phi^* \omega_0 = \omega_{-K} = \omega_0 - dK \wedge dt.$$

Die Funktion K hängt natürlich von ϕ ab. Offenbar muss ϕ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ kanonische Transformation sein, aber nicht jede einparametrische Schar von kanonischen Transformationen induziert eine zeiterhaltende Kontakttransformation. Allgemein gilt natürlich nur

$$\phi^* \omega_0 = \omega_0 + \alpha \wedge dt,$$

und $\alpha \in \Omega_1(\tilde{P})$ braucht nicht einmal geschlossen zu sein. Allerdings definiert eine kanonische Transformation natürlich eine t -unabhängige Schar von kanonischen Transformationen und eine zeiterhaltende Kontakttransformation mit $K \equiv 0$. Aus $\phi^* \omega_0 = \omega_{-K}$ folgt

$$\begin{aligned}\phi^* \omega_{H'} &= \phi^*(\omega_0 + dH' \wedge dt) = \phi^* \omega_0 + dH' \circ \phi \wedge dt \\ &= \omega_0 - dK \wedge dt + dH' \circ \phi \wedge dt = \omega_H\end{aligned}$$

mit $H = H' \circ \phi - K$ oder $H' \circ \phi = H + K$. Also ist ϕ Kontakttransformation, $\phi : (\tilde{P}, \omega_H) \rightarrow (\tilde{P}, \omega_{H'})$.

Wir zeigen nun, dass $\phi^* \tilde{X}_{H'} = \tilde{X}_H$ mit $H' \circ \phi = H + K$. Das bedeutet dann, dass durch eine zeiterhaltende Kontakttransformation die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zur (eventuell zeitabhängigen) Hamiltonfunktion übergehen in die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zur neuen Hamiltonfunktion H' .

BEWEIS: Wir berechnen

$$\omega_H(\phi^* \tilde{X}_{H'}, \phi^* Y) = (\phi^* \omega_{H'}) (\phi^* \tilde{X}_{H'}, \phi^* Y) = \omega_{H'}(\tilde{X}_{H'}, \phi^* Y) \circ \phi = 0$$

für alle $Y \in D^1(\tilde{P})$ und beobachten, dass $\phi^* \tilde{X}_{H'}$ automatisch richtig normiert ist, da ϕ die Zeit t erhält. \square

Die Strategie des zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Formalismus besteht nun darin, durch eine zeiterhaltende Kontakttransformation $H' \equiv 0$ zu erreichen, was lokal möglich ist. Die Bewegungsgleichungen erhalten dann die trivial lösbare Form

$$\dot{P} = \frac{\partial H'}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = 0,$$

so dass P und Q konstant sind. Durch Rücktransformation wird anschließend das ursprüngliche Hamiltonsche Problem gelöst.

Lokal gilt für eine zeiterhaltende Kontakttransformation

$$d\theta_{-K} - \phi^* d\theta_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \theta_{-K} - \phi^* \theta_0 = dS.$$

Durch Übergang zum Graphen $\Gamma_\phi \subset \tilde{P} \times \tilde{P}$ und Einführung von q, Q als Koordinaten auf Γ_ϕ erhält man in Darboux-Koordinaten

$$\sum p_i dq^i + K dt - \sum P_i dQ^i = dS,$$

d.h.

$$\frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q^i} = -P_i, \quad \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t} = K.$$

S ist Erzeugende der Transformation.

Wenn man $H' \circ \phi = H + K \equiv 0$ erreichen will, so muss S die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q, t) = 0$$

erfüllen. Umgekehrt erzeugt jede n -parametrische Schar von Lösungen dieser Gleichung eine zeiterhaltende Kontakttransformation auf $H' \equiv 0$.

Zur Bedeutung von S : Offenbar ist

$$S = \int (pdq - PdQ + Kdt)$$

unabhängig vom Integrationsweg. Wählt man als Weg eine Lösung der Bewegungsgleichung, so ist $dQ \equiv 0$ und $K = -H$, also

$$S = \int (p\dot{q} - H)dt = \int dtL.$$

S ist somit der (stationäre) Wert des Wirkungsfunktionals für eine Lösung der Bewegungsgleichung.

Beispiel: Eindimensionales zeitunabhängiges Problem,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Lösung mit dem Ansatz

$$S(q, E, t) = W(q, E) - Et,$$

also

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = e,$$

so dass

$$\begin{aligned} W &= \int dq \sqrt{2m(E - V)}, \\ -P &= \frac{\partial}{\partial E} S = \int dq \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V}} - t = \text{const.}, \\ E &= \text{const.} \end{aligned}$$

9 Qualitative Mechanik

9.1 Problemstellung und grundlegende Definitionen

Die qualitative Mechanik oder allgemeiner die qualitative Theorie dynamischer Systeme hat weniger die Lösung vorgegebener Bewegungsgleichungen zum Ziel als vielmehr die Identifikation globaler qualitativer Eigenschaften der Menge aller Lösungen.

Ein dynamisches System ist gegeben durch ein Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M , von dem wir nicht verlangen, dass es Hamiltonsch ist. Wir nehmen immer an, dass X vollständig sei, d.h. dass der Fluss

$$\phi_t^X : M \longrightarrow M$$

für alle t existiert. Es gilt, die Eigenschaften von ϕ_t^X zu bestimmen. Wir nennen

$$m_+ = \{\phi_t^X(m) : t \geq 0\}$$

den positiven Teil der Bahn durch m , entsprechende definieren wir m_- als negativen Teil der Bahn und die ganze Bahn $m_{\pm} = m_+ \cup m_-$.

Wir geben eine Liste von qualitativen Fragestellungen an:

- i.) Welche Punkte in M werden von der Bahn durch m besucht oder angenähert?
- ii.) Welche Fixpunkte und geschlossenen Bahnen hat der Fluss ϕ_t^X ?
- iii.) Wie verhält sich ϕ_t^X für sehr große Zeiten t ?
- iv.) Ist der Fluss geordnet oder 'chaotisch'?
- v.) Wie hängt ϕ_t^X von dem Vektorfeld X ab?

9.1.1 Welche Punkte in M werden von der Bahn durch m besucht oder angenähert?

Definition 9.1 Eine Menge $S \subset M$ heißt (positiv) invariant, wenn $\phi_t^X S \subset S$ für alle $t \geq 0$.

Definition 9.2 X heißt ergodisch, wenn M keine nicht-triviale, invariante, messbare Teilmenge hat.

In diesem Fall gibt es keine nicht identisch konstante messbare Erhaltungsgröße, und die Bahn jedes Punktes kommt fast jedem Punkt in M beliebig nahe.

Definition 9.3 $S \subset M$ heißt minimal, wenn S , aber keine echte Teilmenge von S , invariant und abgeschlossen ist.

Minimale Mengen sind zusammenhängend und von der Form $S = \overline{m_{\pm}}$. Es liegt nahe, invariante Teilmengen $S \subset M$ zu untersuchen.

9.1.2 Welche Fixpunkte und geschlossenen Bahnen hat der Fluss ϕ_t^X ?

Fixpunkte von ϕ_t^X sind offenbar gerade Nullstellen von X . Sie heißen auch *kritische Punkte* von X . Kritische Punkte und geschlossene Bahnen von X heißen *kritische Elemente*. Die Menge aller Punkte auf kritischen Elementen von X wird mit Γ_X bezeichnet. Γ_X ist eine invariante Menge.

9.1.3 Wie verhält sich ϕ_t^X für sehr große Zeiten t ?

i.) Limesmengen.

Für $m \in M$ definieren wir

$$\lambda^+(m) = \omega(m) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{\phi_t(m) : t \geq n\}}.$$

Das ist die Menge aller Punkte $x \in M$, die für beliebig große Zeiten noch beliebig von der Bahnkurve durch m angenähert werden, für die also eine Folge $t_n \rightarrow \infty$ existiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(m) = x.$$

Entsprechend definiert man $\lambda^-(m)$, $\lambda^\pm(m) = \lambda^+(m) \cup \lambda^-(m)$. Ferner ist

$$\Lambda_X = \bigcup_{m \in M} \lambda^\pm(m).$$

Offenbar gilt $\Gamma_X \subset \Lambda_X$, und Λ_X ist invariant. Für zweidimensionale Systeme haben die Limesmengen besonders einfache Struktur. Es gilt der fundamentale

Satz 9.4 (Poincaré und Bendixson)

Es sei X ein Vektorfeld auf der Zweisphäre S^2 mit endlich vielen kritischen Punkten. Dann ist jede Limesmenge $\lambda^+(m)$ entweder

- (a) ein kritischer Punkt oder
- (b) eine geschlossene Bahn oder
- (c) sie besteht aus kritischen Punkten p_i , $i = 1, \dots, r$ und regulären Bahnen, die für $t \rightarrow \pm\infty$ jeweils in einen dieser kritischen Punkte einlaufen.

Ferner gilt der

Satz 9.5 (Schwarz)

Es sei X ein Vektorfeld auf einer zweidimensionalen, kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M und A minimale Menge von X . Dann ist entweder

- (a) A ein kritischer Punkt oder
- (b) A eine geschlossene Bahn oder
- (c) $A = M = T^2$ der 2-Torus

ii.) Mengen nicht wandernder Punkte.

Definition 9.6 Ein Punkt m heißt nicht-wandernd, wenn es für jedes $T > 0$ und jede offene Umgebung U von M ein $t > T$ gibt, so dass

$$\phi_t^X U \cap U \neq \emptyset.$$

In Worten: In jeder noch so kleinen Umgebung gibt es Punkte, die zu noch so späten Zeiten in die Umgebung zurückkehren.

Die Menge der nicht-wandernden Punkte heißt Ω_X . Ω_X ist invariant und abgeschlossen, und es gilt

$$\Gamma_X \subset \Lambda_X \subset \Omega_X.$$

Diese Inklusionen können echt sein. Für ein Hamiltonsches Vektorfeld X auf einer kompakten Mannigfaltigkeit P gilt, als Folge des Satzes von Liouville, $\Omega_X = P$. Diese Aussage lässt sich sogar verschärfen zu dem folgenden

Satz 9.7 (Wiederkehrtheorem von Poincaré)

Sei X ein Hamiltonsches Vektorfeld auf einer kompakten (symplektischen) Mannigfaltigkeit P . Dann gibt es zu jeder offenen Teilmenge U und zu jedem $T > 0$ eine ganze Zahl n , so dass

$$(\phi_T^X)^n U \cap U \neq \emptyset.$$

BEWEIS: Wegen der Kompaktheit von P haben die Mengen P und $U^{(r)} = (\phi_T^X)^r U$ endliches Volumen. Da der Fluss ϕ_t^X volumenerhaltend ist, können die Mengen $U^{(r)}$ nicht alle paarweise disjunkt sein, also gibt es $r > s$ mit

$$(\phi_T^X)^r U \cap (\phi_T^X)^s U \neq \emptyset$$

und somit

$$(\phi_T^X)^{r-s} U \cap U = \phi_{(r-s)T}^X U \cap U \neq \emptyset.$$

□

Der Satz ist insbesondere anwendbar auf kompakte Teilmengen der Form

$$P_E = \{p \in P : H(p) \leq E\} \subset P.$$

iii.) *Attraktoren* sind abgeschlossene invariante Teilmengen $A \subset M$, in die für große Zeiten alle Punkte einer gewissen Umgebung einlaufen.

Genauer: Es gibt eine offene Umgebung $A \subset U \subset M$, so dass $\phi_t U \subset U$ für $t \geq 0$, und für alle offenen Teilmengen V mit $A \subset V \subset U$ ein T existiert mit $\phi_t U \subset V$ für $t > T$.

Entsprechend definiert man *Repelloren*.

iv.) *Stabilität*.

Die wichtigsten Stabilitätsbegriffe lassen sich wie folgt andeuten: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} d(m, m') < \delta &\implies d(\phi_t m, \phi_t m') < \epsilon && \text{für } t \geq 0 && \text{(positive Stabilität)} \\ & && d(\phi_t m, \phi_t m') \rightarrow 0 && \text{für } t \rightarrow \infty && \text{(Ljapunov-Stabilität)} \\ & && d(m_+, m'_+) < \epsilon && \text{für } t \geq 0 && \text{(Bahnstabilität)} \\ & && d(m_+, \phi_t m') \rightarrow 0 && \text{für } t \rightarrow \infty && \text{(asymptotische Stabilität)} \end{aligned}$$

9.1.4 Ist der Fluss geordnet oder 'chaotisch'?

Eng mit Stabilitätsfragen verbunden sind Betrachtungen zum Ordnungsgrad des Flusses. Ergodische Flüsse können stabil sein, benachbare Punkte bleiben benachbart (Beispiel: irrationaler Fluss auf einem Torus). Bei unstabilen ergodischen Flüssen kann man je nach der Geschwindigkeit, mit der benachbare Punkte auseinanderstreben, sogenannte mischende Flüsse oder K-Flüsse definieren.

9.1.5 Wie hängt ϕ_t^X von dem Vektorfeld X ab?

Hierzu muss man eine Topologie auf der Menge der Vektorfelder $D^1(M)$ auf M einführen. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir nur, dass zwei Vektorfelder als benachbart definiert werden, wenn ihre Werte zusammen mit einer genügenden Zahl ihrer Ableitungen benachbart sind.

i.) *Generische Eigenschaften von Vektorfeldern*.

Eine Eigenschaft E heißt *generisch*, wenn 'fast alle' Vektorfelder in $D^1(M)$ diese Eigenschaft haben. Genauer definiert man:

Definition 9.8 E heißt generisch, wenn die Menge

$$\mathcal{X}_E = \{X \in D^1(M) : X \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

eine residuale Menge in $D^1(M)$ enthält. Hierbei heißt $Y \subset D^1(M)$ residual, wenn $D^1(M) \setminus Y$ die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. Wenn Y offen und dicht ist, dann ist Y residual.

ii.) Strukturelle Stabilität.

Definition 9.9 Zwei Vektorfelder $X \in D^1(M)$ und $Y \in D^1(N)$ heißen topologisch konjugiert, wenn es einen Homöomorphismus (nicht Diffeomorphismus) $h : M \rightarrow N$ gibt, so dass für alle t

$$h \circ \phi_t^X = \phi_t^Y \circ h.$$

Etwas schwächer ist die folgende

Definition 9.10 Zwei Vektorfelder $X \in D^1(M)$ und $Y \in D^1(N)$ heißen topologisch äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h : M \rightarrow N$ gibt, der orientierte Bahnen von X in orientierte Bahnen von Y überführt.

Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation von Feldern in $D^1(M)$ definiert. Die oben aufgezählten Begriffe, wie $\lambda^\pm(m)$, Λ_X , kritische Punkte etc., sind mit dieser Äquivalenzrelation verträglich, zum Beispiel ist $\Lambda_Y = h(\Lambda_X)$ etc.

Definition 9.11 Ein Vektorfeld $X \in D^1(M)$ heißt strukturell stabil, wenn es eine Umgebung U_X von X in $D^1(M)$ gibt, so dass alle $Y \in U_X$ topologisch äquivalent zu X sind.

Leider ist für $\dim M > 2$ die strukturelle Stabilität keine generische Eigenschaft mehr.

iii.) Bifurkationen.

Wir betrachten eine einparametrische Familie von Vektorfeldern

$$\mu : [0, 1] \longrightarrow D^1(M), \quad c \longmapsto X_c,$$

also eine Kurve in $D^1(M)$. Ein *Bifurkationspunkt* ist ein Punkt $b \in [0, 1]$, in dem die topologische Äquivalenzklasse von X_c wechselt. Die Bifurkationstheorie befasst sich mit generischen Kurven in $D^1(M)$. Man kann auch mehrparametrische Familien von Vektorfeldern betrachten

Besonders weitreichende Resultate über das qualitative Verhalten von Flüssen ϕ_t^X existieren für $\dim M \leq 2$ und für genügend kleine Teilmengen von M .

9.2 Vektorfelder auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten sind diffeomorph zu \mathbb{R}^1 oder S^1 (Kreislinie). Auf \mathbb{R}^1 (oder S^1) existiert ein Standardvektorfeld X_0 ohne kritische Punkte. Jedes andere Vektorfeld ist dann von der Form

$$X = fX_0 \quad \text{mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{bzw.} \quad f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1.$$

Die kritischen Punkte von X sind offenbar genau die Nullstellen von f , und es gibt mindestens so viele Äquivalenzklassen von Vektorfeldern, wie es Homöomorphieklassen von abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^1 (oder S^1) gibt. Es gilt folgendes plausible Resultat:

Satz 9.12 X ist genau dann strukturell stabil, wenn alle Nullstellen von f einfach sind, also wenn $f'(m_0) \neq 0$ für alle Nullstellen m_0 .

Die Menge der so erhaltenen strukturell stabilen Vektorfelder ist offen und dicht (also generisch) in $D^1(M)$. Einfache Nullstellen sind stets isoliert und haben abwechselnd $f' > 0$ und $f' < 0$. Insbesondere ist für $M = S^1$ ihre Anzahl endlich und gerade. Zwei Vektorfelder auf S^1 , deren sämtliche Nullstellen einfach sind, sind genau dann topologisch äquivalent, wenn sie dieselbe Anzahl von Nullstellen haben. Wenn wir zur Definition der Äquivalenz Diffeomorphismen statt Homöomorphismen herangezogen hätten, dann wären die Werte von f' an den kritischen Punkten Invarianten, und Vektorfelder mit kritischen Punkten könnten nicht strukturell stabil sein.

9.3 Lokale Stabilität

Definition 9.13 Es sei $X \in D^1(M)$, $Y \in D^1(N)$, $p \in M$, $q \in N$. X im Punkte p heißt lokal äquivalent zu Y im Punkte q , wenn es offene Umgebungen U_p und U_q gibt, so dass X auf U_p topologisch äquivalent zu Y auf U_q ist.

Definition 9.14 $X \in D^1(M)$ heißt lokal strukturell stabil im Punkte $p \in M$, wenn es zu jeder Umgebung U_p von p eine Umgebung U_X von X gibt, so dass jedes $Y \in U_X$ in einem Punkte $q \in U_p$ lokal äquivalent zu X im Punkte p ist.

Zur Untersuchung der lokalen strukturellen Stabilität haben wir zu unterscheiden, ob p regulärer Punkt ($X(p) \neq 0$) oder kritischer Punkt ($X(p) = 0$) von X ist. Zunächst gilt der

Satz 9.15 Wenn p regulärer Punkt von X ist, dann ist X bei p lokal äquivalent zu dem konstanten Vektorfeld $(1, 0, \dots, 0)$ auf \mathbb{R}^n im Punkte $0 \in \mathbb{R}^n$. Also ist ein Vektorfeld X lokal strukturell stabil in jedem seiner regulären Punkte.

Kritische Punkte sind schwieriger zu untersuchen. Sei $X(p) = 0$. Wir führen Koordinaten auf M ein und ersetzen die Gleichung

$$\dot{x}^i = X^i(x)$$

durch die um den kritischen Punkt linearisierte Gleichung

$$\dot{\xi}^i = \sum_j A_j^i \xi^j \quad \text{mit} \quad A_j^i = \left. \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right|_{x=x_0}.$$

Das qualitative Verhalten der Lösungen des linearisierten Systems hängt von den Eigenwerten der Matrix A_j^i ab. Eigenwerte mit positivem (negativem) Realteil entsprechen Lösungen, die mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell anwachsen (abfallen). Eigenwerte mit verschwindendem Realteil entsprechen einer marginalen, strukturell instabilen Situation. Das motiviert folgende

Definition 9.16 Ein kritischer Punkt p eines Vektorfeldes X heißt hyperbolisch, wenn die Eigenwerte der Linearisierung von X um p alle nicht-verschwindenden Realteil haben. Der Index eines kritischen Punktes ist die Anzahl der Eigenwerte mit negativem Realteil.

Definition 9.17 Ein Vektorfeld heißt hyperbolisch, wenn es die Eigenschaft (G1) hat: Seine kritischen Punkte sind alle hyperbolisch.

Index = n entspricht einem Attraktor, Index = 0 einem Repellor, $0 < \text{Index} < n$ einem sogenannten Sattel. Hyperbolische kritische Punkte sind isoliert, ihre Anzahl ist endlich, wenn M kompakt ist. Analog zum eindimensionalen Fall gilt der

Satz 9.18 Die Menge der hyperbolischen Vektorfelder ist offen und dicht in $D^1(M)$. Insbesondere ist (G1) generisch.

Zur lokalen strukturellen Stabilität formulieren wir den

Satz 9.19 (Hartman und Grobman)

Sei p hyperbolischer kritischer Punkt von X . Dann ist X in p lokal äquivalent zu seiner Linearisierung in p .

Satz 9.20 Sei p hyperbolischer kritischer Punkt von X und q hyperbolischer kritischer Punkt von Y . Dann ist X bei p genau dann lokal äquivalent zu Y bei q , wenn die Indizes von X bei p und Y bei q übereinstimmen.

Satz 9.21 X ist genau dann lokal strukturell stabil für alle $p \in M$, wenn es hyperbolisch ist.

Satz 9.22 Wenn X strukturell stabil ist, so ist X hyperbolisch.

Für Anzahl und Art der hyperbolischen kritischen Punkte liefert das *Indextheorem von Hopf* eine wichtige Einschränkung.

Satz 9.23 Sei M kompakt und orientierbar, $\dim M = n$, und sei X hyperbolisches Vektorfeld auf M . Dann ist

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i n_i = \chi(M)$$

unabhängig von X , wobei n_i die Zahl der kritischen Punkte von X mit Index i und $\chi(M)$ die Eulercharakteristik von M ist.

Es gilt z.B. für

- Sphären S^n :

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Tori T^n :

$$\chi(T^n) = 0$$

- abgeschlossene Kugeln:

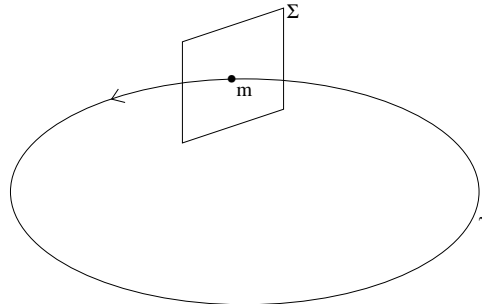
$$\chi(D^n) = 1$$

9.4 Poincaré-Abbildung und hyperbolische Zyklen

Die kritischen Punkte eines Vektorfeldes X auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M bestimmen lediglich das lokale Verhalten des Flusses ϕ_t^X . Schon ein Zyklus γ macht sich nicht an ihnen bemerkbar, da ja alle Punkte auf γ regulär sind. Um die Stabilitätseigenschaften eines Zyklus γ zu untersuchen, betrachten wir eine Hyperfläche Σ transversal zu X , die von γ im Punkte m durchsetzt werde (vgl. Abbildung). Jeder Punkt p in der Nähe von m wird dann nach einem Umlauf die Hyperfläche Σ erneut in einem Punkte

$$\theta(p) = \phi_{t(p)}^X(p)$$

treffen, wobei $t(p)$ gerade die Zeit ist, die für diesem Umlauf benötigt wird.



Die Abbildung θ ist ein (lokaler) Diffeomorphismus von Σ , der m als Fixpunkt hat: $\theta(m) = m$. θ heißt *Poincaré-Abbildung*. Wenn man einen anderen transversalen Schnitt Σ wählt, führt dies zu einer konjugierten, also äquivalenten, Poincaré-Abbildung.

Die Stabilität von γ hängt davon ab, wie sich Punkte in Σ in der Nähe des Fixpunktes m bei wiederholter Anwendung von θ verhalten. Zur Untersuchung dieser Frage betrachten man die Linearisierung von θ um den Punkt m , die nach Einführung von Koordinaten in Σ durch eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix θ_{ij} gegeben sein wird. Die Eigenwerte μ_i von θ_{ij} sind koordinatenunabhängig und unabhängig von Σ . Sie heißen *charakteristische Multiplikatoren* von γ .

γ ist offenbar stabiler Attraktor, wenn alle $|\mu_i| < 1$ für $i = 1, \dots, n-1$ und Repellor, wenn $|\mu_i| > 1$ für alle charakteristischen Multiplikatoren. $|\mu_i| = 1$ für irgendeinen Multiplikator ist offenbar ein marginaler, instabiler Fall. Dies gibt Anlass zu folgender

Definition 9.24 Ein Zyklus γ heißt hyperbolisch, wenn $|\mu_i| \neq 1$ für $i = 1, \dots, n-1$. Der Index von γ ist die Anzahl seiner charakteristischen Multiplikatoren mit $|\mu_i| < 1$.

Definition 9.25 Ein hyperbolisches kritisches Element von X ist ein hyperbolischer Fixpunkt oder ein hyperbolischer Zyklus von X .

Satz 9.26 Hyperbolische kritische Elemente sind isoliert. Wenn M kompakt und zweidimensional ist, dann ist ihre Anzahl endlich.

Satz 9.27 Wenn X einen hyperbolischen Zyklus γ hat, dann gibt es eine Umgebung U_X von X , so dass alle $Y \in U_X$ einen hyperbolischen Zyklus nahe bei γ haben.

Wir geben noch eine Anmerkungen zu Diffeomorphismen und Flüssen.

Die Untersuchung globaler Eigenschaften von Diffeomorphismen θ und Flüssen ϕ_t^X zu Vektorfeldern ist im wesentlichen äquivalent (jedenfalls solange θ sich stetig in den Einheitsdiffeomorphismen deformieren lässt). Jeder solche Diffeomorphismus $\theta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ lässt sich nämlich als Poincaré-Abbildung zu einem geeigneten Fluss ϕ_t^X auffassen, sogar mit konstanter Umlaufzeit T , und für jedes feste t_0 ist natürlich $\phi_{t_0}^X$ ein Diffeomorphismus.

Die bisher für Vektorfelder bzw. Flüsse definierten Begriffe und Eigenschaften lassen sich (fast) alle ebenso gut für Diffeomorphismen definieren. Dasselbe gilt für die weiter unter einzuführenden Eigenschaften.

Beispielsweise ist die positive Bahn m_+ eines Diffeomorphismus θ einfach die abzählbare Menge von Punkten, die sich aus m durch wiederholte Anwendung von θ ergeben:

$$m_+ = \{\theta^n(m) : n = 0, 1, \dots\}.$$

Hiermit ist dann klar, wie sich die Definitionen von $\lambda^\pm(m)$, Λ_X , Ω_X auf Diffeomorphismen übertragen. Offensichtlich sind auch die Definitionen von Generizität und (lokaler) struktureller Stabilität für Diffeomorphismen.

9.5 Generische Eigenschaften

Wir werden nun außer (G1) weitere generische Eigenschaften von Vektorfeldern (und Diffeomorphismen) kennenlernen.

Definition 9.28 Ein Vektorfeld hat die Eigenschaft (G2), wenn seine sämtlichen kritischen Werte hyperbolisch sind.

Es gilt der plausible

Satz 9.29 (G2) ist generisch, und alle strukturell stabilen Vektorfelder haben die Eigenschaft (G2).

Um die generische Eigenschaft (G3) zu definieren, benötigen wir den Begriff der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen kritischen Elementes. Es sei A eine minimale Menge. Dann ist

$$S^\pm(A) = \{m : \lambda^\pm \subset A\} \supset A$$

die invariante Menge von Punkten, deren positive bzw. negative Limesmenge in A liegt. Die Punkte $S^\pm(A)$ laufen gewissermaßen für $t \rightarrow \pm\infty$ in A ein. Wenn A ein Attraktor ist, dann enthält $S^+(A) \supset A$ eine offene Menge und ist gerade der Einzugsbereich des Attraktors, während $S^-(A) = A$ gilt. Die Ausnahmepunkte, die nicht im Einzugsbereich irgendeines Attraktors liegen, bilden die sogenannte *Separatrix*. Sie liegen in Mengen $S^+(B)$, wo B eine minimale Menge, aber kein Attraktor, ist. Wenn α ein hyperbolisches kritisches Element ist, dann lässt sich zeigen:

Satz 9.30 Für hyperbolische kritische Elemente α sind $S^\pm(\alpha)$ lokal eingebettete invariante Untermannigfaltigkeiten. Wenn i der Index von α ist, dann ist

$$\begin{aligned} \dim S^+ &= i & \text{und} & \quad \dim S^- = n - i, & \text{wenn } \alpha \text{ kritischer Punkt und} \\ \dim S^+ &= i + 1 & \text{und} & \quad \dim S^- = n - i, & \text{wenn } \alpha \text{ ein Zyklus ist.} \end{aligned}$$

S^\pm heißen *stabile und instabile Mannigfaltigkeiten* zu α . $S^\pm(\alpha)$ enthält offenbar keinen Fixpunkt außerhalb von α . Da durch jeden Punkt genau eine Bahn geht, gilt

$$S^+(\alpha) \cap S^+(\beta) = S^-(\alpha) \cap S^-(\beta) = \emptyset \quad \text{für } \alpha \neq \beta,$$

und die Mannigfaltigkeiten $S^\pm(\alpha)$ können sich nicht selbst durchschneiden. Durchschneidung von stabilen mit instabilen Mannigfaltigkeiten sind möglich und enthalten mit jedem Schnittpunkt m die ganze Bahn m_\pm von m . Bahnen in $S^+(\alpha) \cap S^-(\beta)$ heißen *homokline Bahnen* von α , sie beginnen und enden in α für $t \rightarrow \mp\infty$. Bahnen in $S^+(\alpha) \cap S^-(\beta)$ für $\alpha \neq \beta$ heißen *heterokline Bahnen* von α , sie beginnen in β und enden in α .

Wenn α ein Zyklus ist, dann kann man die Durchstoßpunkte von homoklinen und heteroklinen Bahnen mit einem Poincaréschnitt Σ betrachten, die sogenannten *homoklinen und heteroklinen Punkte*. Anwendung der Poincaré-Abbildung θ erzeugt aus homoklinen Punkten immer weitere, und es ergibt sich ein kompliziertes Bild von Durchschneidungen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in Σ . Auf der Abbildung unten sind die Linien Schnitte von S^\pm mit Σ . Sie schneiden sich in homoklinen oder heteroklinen Punkten.

Wenn α sattelartig ist, also stabile und instabile Richtungen aufweist, dann liegt $S^+(\alpha)$ in der Separatrix. Das Auftreten von heteroklinen und mehr noch von homoklinen Punkten weist auf eine sehr komplizierte Gestalt der Separatrix hin und ist ein sehr wichtiges Signal für chaotisches Verhalten.

Generisch schneiden sich r und s -dimensionale Untermannigfaltigkeiten N_1 und N_2 einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit gar nicht, wenn $r + s < n$. Für $r + s \geq n$ ist der Schnitt im generischen Fall ($d = r + s - n$)-dimensional. In diesem Fall nennt man den Schnitt von N_1 und N_2 *transversal*. Für den Schnitt stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten muss außerdem $d \geq 1$ gelten. Für $n = 2$ sind insbesondere Sattelverbindungen nicht generisch.

Definition 9.31 Ein Vektorfeld X hat die Eigenschaft (G3), wenn es die Eigenschaft (G2) hat, und wenn es nur transversale Durchschneidungen von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten $S^+(\alpha)$ und $S^-(\beta)$ der kritischen Elemente gibt.

Vektorfelder mit der Eigenschaft (G3) heißen auch *Kupka-Smale-Vektorfelder*.

Satz 9.32 (G3) ist generisch, und alle strukturell stabilen Vektorfelder haben die Eigenschaft (G3).

Für $n = 2$ bedeutet (G3) Hyperbolizität aller kritischen Elemente und Abwesenheit von Sattelverbindungen. Etwas weniger anschaulich aber wichtig ist die Eigenschaft (G4).

Satz 9.33 Ein Vektorfeld hat die Eigenschaft (G4), wenn $\overline{\Gamma_X} = \Omega_X$ gilt, d.h. sämtliche nicht-wandernden Punkte liegen im Abschluss von Γ_X .

Ein irrationales Vektorfeld auf dem Torus T^2 ist ein Beispiel eines Vektorfeldes ohne die Eigenschaft (G4). Die letzte wichtige Definition, die wir ausführlicher beschreiben, ist die folgende.

Definition 9.34 Ein Morse-Smale-Vektorfeld ist ein Vektorfeld mit den Eigenschaften (G3), (G4) und (F): Die Anzahl der kritischen Elemente ist endlich.

Satz 9.35 Morse-Smale-Vektorfelder sind strukturell stabil.

Wenn Σ_M die Menge der Morse-Smale-Vektorfelder bezeichnet, Σ_S die strukturell stabilen Vektorfelder und \mathcal{G}_4 die Vektorfelder mit den Eigenschaften (G1) - (G4), so gilt also

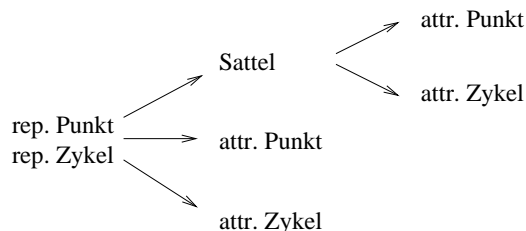
$$\Sigma_M \subset \Sigma_S \subset \mathcal{G}_4.$$

Für $n = 2$ und M kompakt ist (F) schon eine Folge von (G2), und die Morse-Smale-Vektorfelder sind für $n = 2$ gekennzeichnet durch die folgenden Eigenschaften:

- i.) endlich viele, sämtlich hyperbolische kritische Elemente
- ii.) Abwesenheit von Sattelverbindungen
- iii.) Für jeden Punkt m sind $\lambda^\pm(m)$ eindeutige kritische Elemente.

BEWEIS: Dass Morse-Smale-Vektorfelder die obigen Eigenschaften haben, ist klar. Ebenso ist klar, dass aus den obigen Eigenschaften (G2), (G3) und (F) folgen. (G4) folgt ebenfalls. Sei nämlich $m \notin \Gamma_X$ nicht-wandernd. Dann ist $\lambda^+(m)$ kein Attraktor und $\lambda^-(m)$ kein Repellor, also gibt es eine Sattelverbindung im Widerspruch zu ii.). \square

Für $n = 2$ können Morse-Smale-Vektorfelder nur folgende Verbindungen von kritischen Elementen durch Trajektorien aufweisen:



Hierdurch ist eine Halbordnung auf der Menge der kritischen Elemente definiert, der sogenannte *Smalsche Fächer*.

Einen Durchbruch für die qualitative Theorie dynamischer Systeme in zwei Dimensionen stellt das folgende Theorem (Peixoto, 1962) dar.

Satz 9.36 *Sei X ein vollständiges Vektorfeld auf einer kompakten, orientierbaren, zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M . Dann ist X genau dann strukturell stabil, wenn es ein Morse-Smale-Vektorfeld ist, und die Menge der strukturell stabilen Vektorfelder ist offen und dicht.*

Für $n = 2$ ist also strukturelle Stabilität generisch und durch die Morse-Smale-Eigenschaft charakterisiert. Für $n \geq 3$ sind die Verhältnisse viel komplizierter:

- Ω_X kann ganz andere Mengen enthalten, etwa chaotische Mengen und seltsame Attraktoren.
- Sattelverbindungen können generisch werden, was zu neuer, nicht-trivialer Rekurrenz führen kann.
- (F) ist nicht mehr generisch. Es gibt für jedes $n \geq 2$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M und ein Vektorfeld X auf M , so dass in einer offenen Umgebung U_X von X alle Vektorfelder die Eigenschaft (G4), aber nicht (F) haben.
- Es gibt für jedes $n > 2$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M und ein Vektorfeld X auf M , das strukturell stabil ist, aber nicht Eigenschaft (F) hat.
- Es gibt eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit M , auf der die strukturell stabilen Vektorfelder nicht dicht sind.

Das große, bisher ungelöste Problem für $n \geq 3$ ist die Charakterisierung der generischen Vektorfelder. Die Definition der Hyperbolizität lässt sich auf Ω_X erweitern. Man sagt, dass Vektorfelder mit hyperbolischem Ω_X Axiom (A) erfüllen. Solche Vektorfelder sind aber immer noch nicht generisch.

Eine Zerlegung von $\Omega_X = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_s$ in irreduzible Komponenten ist möglich, und man kann die Existenz einer Halbordnung (Smalscher Fächer) auf den Ω_i fordern. Näheres dazu in Abraham-Marsden, Kapitel 7.

9.6 Bifurkationen, generische Kurven in $D^1(M)$, ‘Katastrophen’

Wenn Vektorfelder von einem Parameter α abhängen, dann ergibt das Kurven:

$$\begin{aligned} \mu : [0, 1] &= I \longrightarrow D^1(M) \\ &= \alpha \longrightarrow X_\alpha \in D^1(M) \end{aligned}$$

Die Punkte in I , an denen sich das Verhalten von X_α qualitativ ändert, an denen also die topologische Äquivalenzklasse von X_α wechselt, heißen *Bifurkationspunkte*. Sie bilden eine Teilmenge $I_B \subset I$. Für $n = 2$ lassen sich I_B und die möglichen Bifurkationen im generischen Fall gut charakterisieren. Es beschreibt dies der Satz von Sotomayer (1968):

Satz 9.37 *Es sei $\mu : I \rightarrow D^1 M$ eine generische Kurve in $D^1(M)$ und M sei 2-dimensional. Dann gilt:*

- Die Bifurkationsmenge $I_B \subset I$ ist abgeschlossen und nirgends dicht in I .
- Bifurkationen treten genau für die Parameterwerte α auf, für die X_α kein Morse-Smale-Vektorfeld ist.
- An einem Bifurkationspunkt tritt genau eine der folgenden Katastrophen auf:

(Q1) Ein kritischer Punkt wird nicht-hyperbolisch.

(Q2) Ein Zyklus wird nicht-hyperbolisch.

(Q3) Es bildet sich eine Sattelverbindung aus.

(Q4) Es bildet sich eine nicht-triviale Rekurrenz aus, d.h. es gelten (G2), (G3) und (F), nicht aber (G4).

Für $\dim M > 2$ gilt nur ein schwächeres Ergebnis für generische Kurven:

i.) $I_B \subset I$ ist abgeschlossen.

ii.) $I_B = I_3 \cup I_4$, wobei I_3 die Bifurkationspunkte sind, für die X_α die Eigenschaft (G2) oder (G3) nicht hat, und I_4 die Bifurkationspunkte sind, für die X_α (G2) oder (G3) oder (G4) nicht hat.

iii.) Für $\alpha \in I_3$ ereignet sich genau eine der folgenden Katastrophen:

(Q1) Ein kritischer Punkt wird nicht-hyperbolisch.

(Q2) Eine geschlossene Bahn wird nicht-hyperbolisch.

(Q3) Es bildet sich eine Sattelverbindung zweier kritischer Elemente.

iv.) Für $\alpha \in I_4$ tritt nicht-triviale Rekurrenz auf.

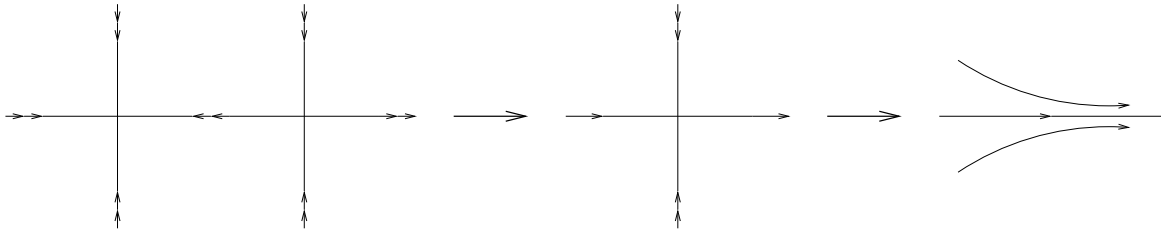
Derartige Bifurkationen können beim Durchstimmen eines Parameters an einem dynamischen System beobachtet werden. In einem strömenden Fluid tritt beispielsweise Turbulenz auf, sobald die Reynolds-Zahl einen kritischen Wert überschreitet. Ein weiteres Beispiel ist die Bénard-Instabilität: Wenn eine Flüssigkeit über einer ebenen Platte steht, dann findet bei geringer Erwärmung zunächst nur Wärmeleitung statt, bei Erhöhung des Temperaturgradienten setzt Konvektion mit regelmäßigen Konvektionszellen ein, die bei weiterer Steigerung der Temperaturdifferenz in immer kleinere Zellen zerfallen, bis das Strömungsmuster plötzlich chaotisch wird.

Wir wollen zum Schluss einige elementare Katastrophen an Fixpunkten und Zyklen aufzählen, die auf generischen Kurven in $D^1(M)$ zu erwarten sind.

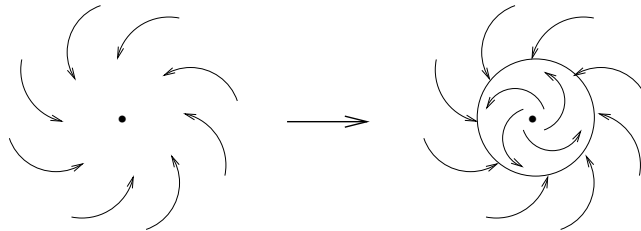
Wegen des Hopfschen Indextheorems ist es im Allgemeinen nicht möglich, dass durch eine lokale Änderung von X nur ein kritischer Exponent eines einzelnen kritischen Punktes verschwindet. Vielmehr müssen kritische Elemente zusammenrücken und in Wechselwirkung treten.

9.6.1 Katastrophen an kritischen Punkten

i.) Zwei kritische Punkte mit Indizes i und $i + 1$ stoßen zusammen und verschwinden. Hierbei geht bei beiden kritischen Punkten ein Exponent λ gegen Null.



ii.) Hopf-Bifurkation $\lambda_{1,2} \rightarrow \pm i\beta$. Einem Attraktor in zwei Richtungen wird also ein attraktiver Zyklus und ein Repellor in zwei Richtungen zugeordnet.

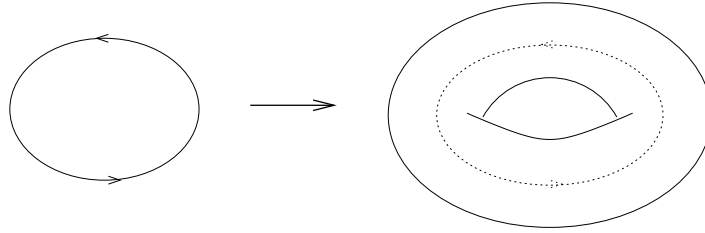


9.6.2 Katastrophen an Zyklen

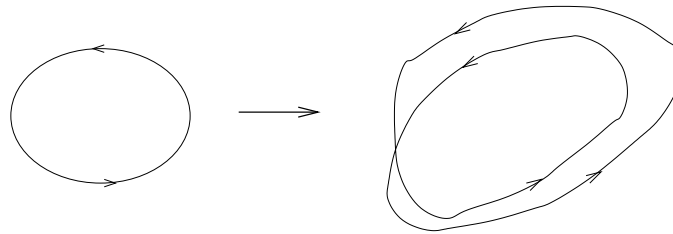
Hierbei nehmen kritische Multiplikatoren der Poincaré-Abbildung $|\mu_i| = 1$ an.

i.) $\mu = 1$ wie in i.) im letzten Abschnitt für die Poincaré-Abbildung.

ii.) $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, Hopf-Bifurkation für die Poincaré-Abbildung, Attraktor-Zykel \rightarrow Repellor-Zykel und Attraktor-Torus.



iii.) $\mu = -1$, Periodenverdopplung. Ein Zyklus verdoppelt seine Länge und Periode durch Aufspaltung. Dies ist nur möglich für $\dim M \geq 3$.



Es gibt unzählige beobachtbare Fälle, bei denen sich derartige Katastrophen bemerkbar machen. Von besonderem Interesse sind generische Kurven, auf denen das Verhalten eines Vektorfeldes vom Regulären ins Chaotische übergeht, wobei chaotisches Verhalten in dissipativen Systemen durch die Existenz seltsamer Attraktoren gekennzeichnet ist. Folgende Wege zum Chaos ('Szenarien') sind als generisch bekannt und beobachtet:

i.) Unendliche Folge von Periodenverdopplungen für Werte $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_0$.

ii.) Ruelle-Takens-Szenario: Ein attraktiver Fixpunkt geht durch zwei aufeinander folgende Hopf-Bifurkationen in einen 2-Torus über, worauf sich dann ein chaotischer Attraktor ausbildet:

$$p \longrightarrow T^1 \longrightarrow T^2 \longrightarrow \text{seltsamer Attraktor.}$$

iii.) Übergang durch Intermittenz: Chaotisches Verhalten tritt auf und verschwindet mehrmals, bis es sich endgültig durchsetzt.

9.7 Attraktoren und Chaos

In dynamischen Systemen der Dimension $n \geq 3$ können in generischer Weise ganz andere Attraktoren als nur Fixpunkte und Grenzzyklen auftreten. Die Bewegung auf und nahe bei diesen 'seltsamen Attraktoren' ist in hohem Maße irregulär. Seltsame Attraktoren können in dissipativen Systemen auftreten, bei denen das Phasenraumvolumen unter dem Fluss ϕ_t^X für $t > 0$ kontrahiert wird, und sie werden als Modell oder Erklärung für die zahlreichen Beispiele chaotischen Verhaltens deterministischer Systeme herangezogen.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Lorentz-System, das im Jahre 1963 als vereinfachtes Modell zur Beschreibung des Bénard-Phänomens konstruiert wurde. Es ist ein dreidimensionales Dynamisches System mit der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ay \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned}$$

wobei $a, b > 0$. Die relative Volumenänderung unter dem Fluss ist offenbar

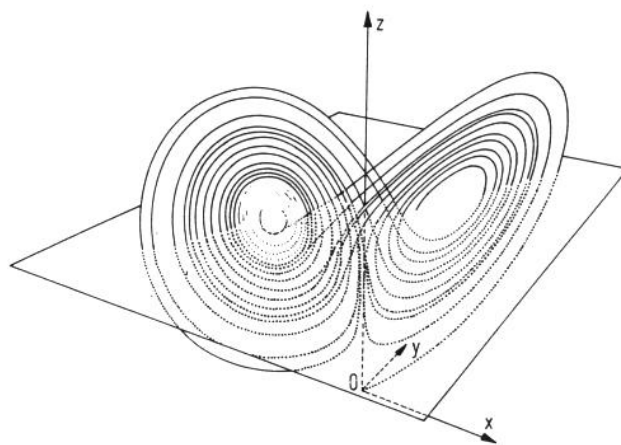
$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -(a + b + 1) < 0.$$

In Abhängigkeit vom Parameter r tritt qualitativ unterschiedliches Verhalten auf, das für geeignete Werte von r chaotisch ist. Dynamische Systeme ähnlicher Art treten in unzähligen Situationen auf, z.B. in der Populationsdynamik, Ökonomie, Chemie oder Elektrotechnik. Die Dynamik der Raten x, y, z von H_2, O_2, H_2O in der Reaktion $2H_2 + O_2 \rightleftharpoons 2H_2O$ ist beispielsweise durch ein Gleichungssystem

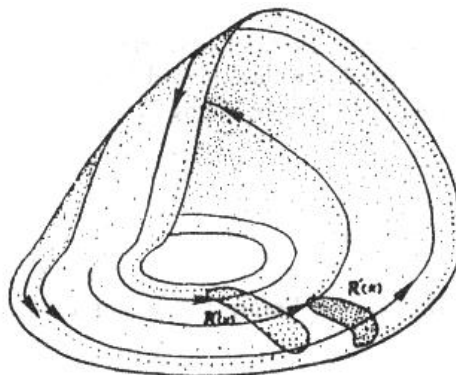
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2k_1z^2 - 2k_2x^2y \\ \dot{y} &= k_1z^2 - k_2x^2y \\ \dot{z} &= -2k_1z^2 + 2k_2x^2y \end{aligned}$$

zu beschreiben. Für kompliziertere Reaktionen können die Lösungen der Reaktionsgleichungen merkwürdiges Verhalten haben. Beispiele sind die Belousov-Zhabotinskij-Reaktion (eine Oxidationsreaktion von Malonsäure durch Bromat) oder der sogenannte Brusselator. Es werden Grenzzyklen und chaotisches Verhalten beobachtet.

Die wichtigsten Eigenschaften eines Lorentz-Systems im chaotischen Bereich entnehmen wir der folgenden Abbildung (für $r = 28, a = 10, b = 8/3$, aus Schuster: Deterministic Chaos).



Es bildet sich ein eigentümlich geformter, vornehmlich um eine gewisse zweidimensionale Fläche herum konzentrierter Attraktor aus. Die Trajektorien werden längs des Attraktors auseinandergespreizt und quer zum Attraktor kontrahiert. Auf jedem der beiden 'Ohren' des Attraktors findet eine intensive Durchmischung statt: Die Trajektorien laufen auf jedem Ohr zunächst spiralenförmig von innen nach außen, bis sie plötzlich in den inneren Bereich des anderen Ohres springen. Eine Schlüsselrolle bei diesem Umschaltvorgang spielt ein Fixpunkt bei $(0, 0, 0)$ mit Index $i = 2$. (Im Zentrum der beiden Ohren befindet sich je ein Fixpunkt vom Index $i = 1$, und es gibt heterokline Bahnen. Der Attraktor ist keineswegs genau zweidimensional, sondern weist in transversaler Richtung eine eigentümliche, in immer kleineren Skalen selbstähnliche 'fraktale' Blätterstruktur auf, die wir genauer an einem anderen Modell, dem sogenannten Roessler-Attraktor studieren wollen (vgl. Abbildung aus Abraham & Shaw: Dynamics)



Die Blätterteigstruktur entsteht (wie beim Lorentz-Attraktor) dadurch, dass ein Band längs des Attraktors immer wieder gespreizt und dann durch Faltung wieder auf seine ursprüngliche Breite gebracht wird. Die einzelnen Blätter werden durch die Kontraktion quer zum Attraktor immer dichter aufeinandergepresst. Zur detaillierten Betrachtung der Feinstruktur könnte man die Poincaré-Abbildung für einen transversalen Schnitt durch den Attraktor heranziehen.

Die *Hénon-Abbildung* ist eine Abbildung des zweidimensionalen Raumes in sich, die man als Prototyp der Poincaré-Abbildung zu einem seltsamen Attraktor der soeben geschilderten Art ansehen kann. Sie hat die Gestalt

$$(x, y) \mapsto \theta(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$$

mit

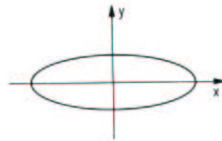
$$\begin{aligned}\hat{x} &= 1 - ax^2 + y, \\ \hat{y} &= -bx, \quad 0 < b < 1.\end{aligned}$$

Die Volumenkontraktion bei Anwendung von θ ergibt sich sofort aus der Determinante der Jacobimatrix:

$$\det \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = +b.$$

Die Wirkung von θ beobachtet man am besten, indem man $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$ als Hintereinanderschaltung von drei Abbildungen darstellt (Bilder aus Schuster: *Deterministic Chaos*).

Wir betrachten zunächst die Ausgangsgestalt:



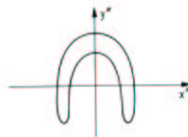
θ_1 ist eine flächenerhaltende Verbiegung:

$$\theta_1 : \quad x' = x, \quad y' = 1 - ax^2 + y.$$



θ_2 ist eine Kontraktion:

$$\theta_2 : \quad x'' = bx', \quad y'' = y'.$$



θ_3 ist eine Drehung um 90° :

$$\theta_3 : \quad x''' = \hat{x} = y'', \quad y''' = \hat{y} = -x''.$$



Es ist anschaulich, dass durch wiederholte Anwendung der Hénon-Abbildung ein Attraktor mit selbstähnlicher, blätterartiger Struktur entsteht. Dieser Hénon Attraktor ist in der folgenden Abbildung (wieder aus Schuster) dargestellt.

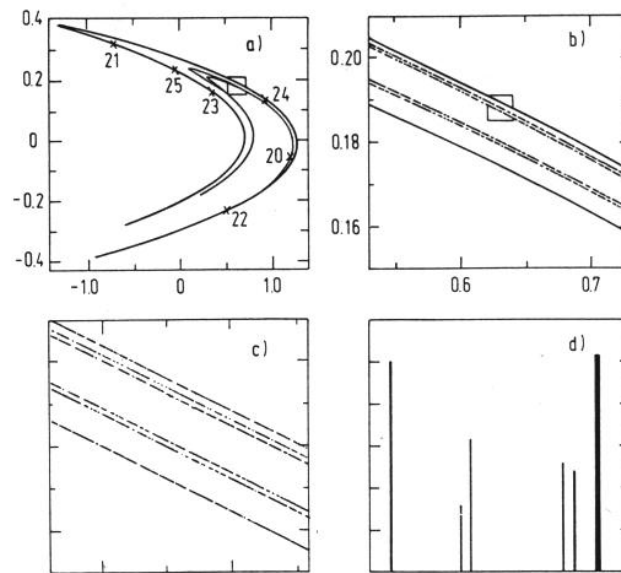


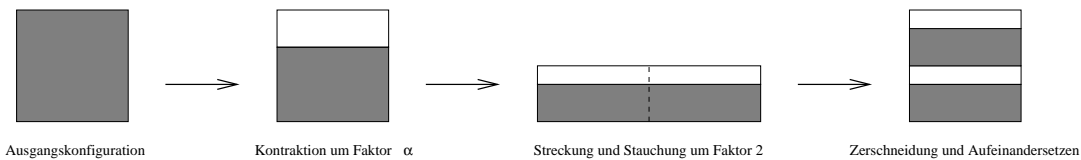
Abbildung a) zeigt den Hénon-Attraktor als ganzen. In b) und c) werden jeweils Ausschnittsvergrößerungen gezeigt. Die Selbstähnlichkeit auf immer kleinere Skalen wird sichtbar. In d) ist die relative Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf jedem der sechs in b) und c) sichtbaren 'Bänder' aufgetragen.

Eine weitere (allerdings unstetige) Vereinfachung und Idealisierung der Hénon-Abbildung ist die sogenannte Bäckertransformation des Einheitsquadrates in der Ebene auf sich:

$$x' = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

$$y' = \begin{cases} \frac{a}{2}y & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}y + \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

wobei $0 < a < 1$ ist. Sie lässt sich durch Hintereinanderschaltung folgender Abbildungen veranschaulichen:



Der Name der Abbildung erklärt sich daraus, dass sie in gewisser Weise das Falten und Ausrollen von Teig simuliert. Man sieht, wie durch wiederholte Anwendung wieder eine selbstähnliche Blätterstruktur entsteht. Als wichtige Kennzeichen seltsamer Attraktoren halten wir fest:

- i.) Durchmischung auf den Attraktor, nahe beieinanderliegende Punkte entfernen sich in schwer kontrollierbarer Weise voneinander.
- ii.) Zusammenspiel von Stauchung quer zum Attraktor und Dehnung längs des Attraktors.
- iii.) Fraktale, selbstähnliche Feinstruktur.

Wir kommen nun zu einigen Hilfsmitteln zur quantitativen Beschreibung dieser Phänomene

9.7.1 Liapunov-Exponenten

Wir betrachten eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, etwa eine Poincaré-Abbildung oder einen diskretisierten Fluss $\phi_{t_0}^X$. Das lokale Streckungs- und Stauchungsverhalten von f im Punkte x ist durch die Eigenwerte

$$\mu_i(x) = e^{\lambda_i(x) + i\nu_i(x)}$$

der Jacobi-Matrix $f'(x)$ gegeben. Um eine globale mittlere Spreizung von f zu definieren, müssen wir mitteln, und zwar mit einem Maß ρ , das invariant unter f ist. Für den Fall, dass f auf der betrachteten Menge ergodisch wirkt, ist ρ eindeutig gegeben durch die Mittelung über irgendeine Bahn von f :

$$\langle \phi \rangle = \int d^n x \rho(x) \phi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \phi(x_r)$$

mit $x_{r+1} = f(x_r)$ und x_1 beliebig.

Indem wir die Realteile $\lambda_i(x)$ von $\ln \mu_i(x)$ der Größe nach ordnen, $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x)$ erhalten wir die Definition der Liapunov-Exponenten λ_k .

$$\begin{aligned} L_1 = \lambda_1 &= \int d^n x \rho(x) \lambda_1(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \lambda_1(x_r) \\ L_k = \lambda_1 + \dots + \lambda_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (\lambda_1(x_r) + \dots + \lambda_k(x_r)) \\ L_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (\lambda_1(x_r) + \dots + \lambda_n(x_r)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \ln \det f'(x_r) = \int d^n x \rho(x) \ln \det f'(x). \end{aligned}$$

Beispiel: Bei der Bäckertransformation sind die $\lambda_i(x)$ konstant, so dass sich die Mittelung erübrigt, und man erhält

$$\lambda_1 = \ln 2, \quad \lambda_2 = \ln \frac{a}{2} < 0, \quad L_2 = \ln a.$$

Ebenso findet man für die Hénon-Abbildung $L_2 = \ln n$.

L_1 ist ein Maß für die mittlere Dehnung eines Streckenelementes. Der maximale Eigenwert setzt sich bei der Mittelung im generischen Fall durch L_n misst die mittlere relative Volumensänderung und L_k charakterisiert die mittlere Flächenänderung von k -dimensionalen Flächenelementen. Die Liapunov-Exponenten sind sehr wichtige Kenngrößen für das globale Verhalten von f : $L_n < 0$ signalisiert die Existenz von Attraktoren und $\lambda_1 > 0$ ist ein Signal für chaotisches Verhalten. Zudem existieren effiziente Verfahren zur wirklichen Berechnung der Liapunov-Exponenten. Es lässt sich zeigen, dass der folgende Algorithmus zum Ziel führt. Man beginnt mit einem kleinen orthogonalen k -Bein im Punkte x_1 , das aus Vektoren derselben Länge besteht. Man berechnet das Bild der k -Beins unter f und den Logarithmus des Verhältnisses der k -Volumina von neuem und altem k -Bein. Anschließend orthogonalisiert man das neue k -Bein und bildet es erneut mit f ab. Nach N Iterationen bildet man den Mittelwert der Logarithmen der Volumenverhältnisse, die sich bei jeder Iteration ergeben haben. Dieser Mittelwert strebt für $N \rightarrow \infty$ gegen L_k , wenn das anfängliche k -Bein generisch gewählt war (d.h. praktisch immer), da sich bei der Iteration die größeren Eigenwerte durchsetzen.

Trotz ihrer großen praktischen Bedeutung sind die Liapunov-Exponenten keine topologischen Invarianten. Topologisch äquivalente Flüsse können verschiedene Liapunov-Exponenten haben, wie man ja auch an der b -Abhängigkeit von L_2 bei der Hénon-Abbildung sieht. Es liegt nicht einmal Invarianz unter Diffeomorphismen vor, sondern nur unter solchen Diffeomorphismen, die das invariante Maß ρ fest lassen. Für Hamiltonsche Vektorfelder sind dies die kanonischen Transformationen und ρ ist das Liouvillemaß. Die Liapunov-Exponenten sind kanonische Invarianten, und es ist $L_n = 0$.

Schließlich erwähnen wir noch eine interessante andere Darstellung von L_n : Aus der Kettenregel folgt

$$f(f(x))'|_{x=x_1} = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1) \quad (\text{Matrixprodukt})$$

und entsprechend für die N -fache Iterierte $f^{(N)}$ von f

$$f^{(N)}(x_1) = \prod_{r=1}^N f'(x_{N-r+1}).$$

Somit folgt

$$\sum_{r=1}^N \ln \det f'(x_r) = \ln \det \prod_{r=1}^N f'(x_r) = \ln \det f^{(N)}(x_1)$$

und

$$L_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \det f^{(N)}(x_1)$$

unabhängig von x_1 .

9.7.2 Hausdorff-Dimension und Verallgemeinerungen

Die Definition der Hausdorff-Dimension verallgemeinert die Tatsache, dass die Anzahl $N(\epsilon)$ von Würfeln der Kantenlänge ϵ , die zur Überdeckung einer D -dimensionalen Mannigfaltigkeit benötigt werden, für $\epsilon \rightarrow 0$ wie ϵ^{-D} anwächst. Man definiert nun auch für allgemeinere Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^N$ die Hausdorff-Dimension D durch

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln 1/\epsilon},$$

wobei $N(\epsilon)$ die Anzahl der zur Überdeckung von M benötigten N -dimensionalen Würfel mit Kantenlänge ϵ ist. Wenn die 'Einbettungsdimension' N groß genug ist, ist D unabhängig von N . Es gibt nun Mengen, sogenannte *Fraktale*, mit nicht-ganzzahliger Hausdorff-Dimension D . Das einfachste Beispiel für Fraktale sind die Cantormengen. Man unterteilt das Einheitsintervall in drei Teile und lässt das mittlere Intervall fort. Mit den verbleibenden beiden Teilintervallen verfährt man ebenso und so weiter bis ins Unendliche.



Die Hausdorff-Dimension dieser Menge ergibt sich mit der Folge $\epsilon_n = 1/3^n$: $N(\epsilon_{n+1}) = 2N(\epsilon_n)$, also

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} < 1.$$

Auch für den Attraktor der Bäcker-Transformation lässt sich die Hausdorff-Dimension leicht berechnen. In x -Richtung liegen nur normale eindimensionale Intervalle vor. In y -Richtung findet man mit $\epsilon_n = (a/2)^n$ wieder $N(\epsilon_{n+1}) = 2N(\epsilon_n)$ und somit

$$D = 1 + \frac{\ln 2}{|\ln a/2|}.$$

Es ist $1 \leq D \leq 2$ und $D = 1$ für $a = 0$ sowie $D = 2$ für $a = 1$ wie zu erwarten.

Seltsame Attraktoren haben typischerweise unganzzahlige Hausdorff-Dimensionen, was auf ihre fraktale selbstähnliche Struktur zurückzuführen ist. Für den Lorentz-Attraktor ist D etwas größer als 2 und für den Hénon-Attraktor etwas größer als 1, in beiden Fällen abhängig von den Werten der Parameter. Die Hausdorff-Dimension ist ebensowenig eine topologische Invariante wie die Liapunov-Exponenten. Für den Bäcker-Attraktor ist

$$D = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}.$$

Kaplan und York haben vermutet, dass allgemein gilt

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

wobei j der größte Index mit $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$ ist.

Es gibt viele weitere Definitionen nicht-ganzzahliger Dimensionen, von denen wir einige beschreiben wollen. Hierzu teilen wir den Phasenraum in Zellen der Größe ϵ ein. w_i sei dann das Maß der i -ten Zelle bezüglich des oben definierten invarianten Maßes ρ . Für $0 \leq \alpha < \infty$ definiert man die α -Dimension einer ergodischen Teilmenge durch

$$D_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} w_i^\alpha.$$

$N(\epsilon)$ ist wieder die Anzahl der zur Überdeckung nötigen Zellen. Offenbar ist $D_0 = D$ die Hausdorff-Dimension. Wenn w_i eine Gleichverteilung ist, $w_i = \frac{1}{N(\epsilon)}$, dann ist $D_\alpha = D_0$ unabhängig von α . Somit sind verschiedene Werte $D_\alpha, D_{\alpha'}$ ein Maß für die Inhomogenität eines seltsamen Attraktors. Für eine gewöhnliche D -Mannigfaltigkeit ist $w_i \sim \epsilon^D$, $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$ und $D_\alpha = D$ unanständig von α . Allgemein ist $D_{\alpha'} \leq D_\alpha$ für $\alpha' > \alpha$. Für $\alpha = 0, 1, 2$ ist

$$\begin{aligned} D_0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \ln N(\epsilon) && \text{Hausdorff-Dimension,} \\ D_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} w_i \ln w_i && \text{Entropiesimension,} \\ D_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} w_i^2 && \text{Korrelationsdimension.} \end{aligned}$$

D_2 ist besonders leicht zu bestimmen. Wenn man sich durch Iteration wieder N Punkte x_r ($r = 1, \dots, N$) mit $x_{r+1} = f(x_r)$ verschafft, dann ist näherungsweise $w_i = n_i/N$, wenn n_i die Zahl der Punkte in der i -ten Zelle ist. Damit ist

$$\begin{aligned} D_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \epsilon} \ln \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta(\epsilon - |x_i - x_j|) \right), \quad (\theta : \theta\text{-Funktion}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} C(\epsilon). \end{aligned}$$

$C(\epsilon)$ ist das Korrelationsintegral, und $C(\epsilon) \sim \epsilon^{D_2}$.

Die Bestimmung der übrigen D_α ist mühsamer. Für den Lorentz-Attraktor ist typischerweise $D_2 = 2,05$ und für den Hénon-Attraktor $D_2 = 1,21$ für $a = 1,4$, $b = 0,3$. Bei der Messung an dynamischen Systemen taucht oft die Schwierigkeit auf, dass der Zustand

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^d$$

für $d \geq n$ dieselbe Information wie $x(t)$ enthalten. Statt den Zustand zu einer Zeit kann man auch eine einzige Koordinate zu verschiedenen Zeiten messen und die Verfahren zur Bestimmung der Kenngrößen λ_i, D_α auf y statt auf x anwenden. Dies führt mit endlichem Wert von d sogar für unendlich-dimensionale Systeme zum Ziel, da chaotische Attraktoren i.a. endliche und sogar kleine Dimensionen haben. Bei der Messung von D_α kann man übrigens chaotisches Verhalten von deterministischen Systemen von stochastischem Chaos unterscheiden, das durch eine stochastische Störung der Größenordnung l bewirkt wird.

- Wenn $\epsilon < l$ wird, verwischt sich ein chaotischer Attraktor. Wenn man $\ln \epsilon$ gegen $\frac{1}{1-\alpha} \sum_i w_i^\alpha$ aufträgt, dann ist die Steigung des Graphen für $\epsilon \gg l$ durch D_α gegeben und für $\epsilon \ll l$ durch die Dimension n des Systems.
- Wenn man in einem unendlich-dimensionalen System die Vektoren y benutzt, dann stabilisieren sich die Resultate nicht mehr für d jenseits einer gewissen Schwelle.

9.7.3 Kolmogorov-Entropie

Das wichtigste Maß für die Unvorhersehbarkeit oder Chaotizität eines Flusses oder eines Diffeomorphismus ist seine Kolmogorov-Entropie. Um sie zu definieren, teilen wir den Phasenraum wieder in Zellen der Größe ϵ ein und betrachten die Wahrscheinlichkeiten (bezüglich des invarianten Maßes) w_{i_0, \dots, i_n} dafür, dass der Zustand sich zu den Zeiten $t_0, t_0 + r, \dots, t_0 + nr$ in den Zellen i_0, \dots, i_n befindet. Für $0 \leq \alpha < \infty$ definieren wir zunächst

$$K_\alpha^{(n)} = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{i_0, \dots, i_n} w_{i_0, \dots, i_n}^\alpha.$$

$K_\alpha^{(n+1)} - K_\alpha^{(n)}$ ist der Zuwachs an α -Entropie, der daraus erwächst, dass durch Unstabilitäten der Zustand zur Zeit $t_0 + (n+1)\tau$ sich nicht unbedingt auf eine Zelle genau bestimmen lässt, obwohl er zu den vergangenen Zeitpunkten $t_0 + r\tau$ ($0 \leq r \leq n$) mit der Genauigkeit einer Zelle bekannt war.

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \left(K_\alpha^{(n+1)} - K_\alpha^{(n)} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} K_\alpha^{(n)} \end{aligned}$$

ist dann ein Maß für die mittlere Erzeugungsrate von α -Entropie. Für Diffeomorphismen entfällt der Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$. Es gilt wieder $K_{\alpha'} \leq K_{\alpha}$ für $\alpha' > \alpha$.

$$K = K_1 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-1}{N\tau} \sum_{i_0, \dots, i_n} \ln w_{i_0, \dots, i_n}$$

ist die *Kolmogorov-Entropie*.

Es ist $K = \sum \lambda_i^+$, die Summe der positiven Liapunov-Exponenten. Die K_{α} können mit denen im vorigen Abschnitt behandelten Methoden berechnet werden. Die Rechnung ist allerdings gewöhnlich nur für K_2 praktikabel. In Systemen mit positiver Kolmogorov-Entropie streben die Trajektorien benachbarter Punkte exponentiell auseinander, die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist also stark instabil. Dynamische Systeme mit $K > 0$ heißen *K-Systeme* oder *K-Flüsse*.

Mischende Systeme sind dadurch definiert, das für messbare Mengen A, B $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\phi_t^X(A) \cap B) = \rho(A)\rho(B)$ gilt. Sie sind allgemeiner als K-Systeme, da sich in ihnen benachbarte Trajektorien zwar voneinander entfernen, die Entfernung aber langsamer als exponentiell sein darf.

Ergodische, mischende und K-Systeme lassen sich durch das Spektrum des Liouville-Operators $L_X : \phi \rightarrow L_X \phi = X \phi$ unterscheiden.

- Ergodisch: L_X hat nicht entarteten Eigenwert Null, da jede Erhaltungsgröße identisch konstant sein muss.
- Mischend: L_X hat Null als einfachen Eigenwert, sonst ist das System kontinuierlich.
- K-Fluss: Wie im vorigen Fall, aber zusätzlich abzählbar-unendliche Entartung im kontinuierlichen Spektrum.